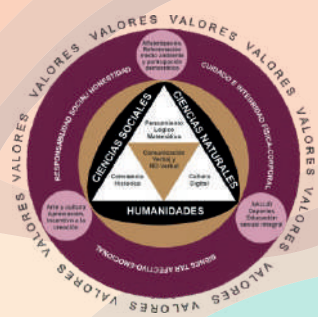
"Curso de capacitación docente: Metodología para la didáctica de las Unidades de Aprendizaje Curricular (UAC) de Primer Semestre del MCCEMS en TEBAEV"



Pensamiento Matemático I

VERACRUZ GOBIERNO DEL ESTADO

TEBAEV Telebachillerato de Veracruz

DIRECCIÓN GENERAL DE TELEBACHILLERATO

ACADEMIAS PEDAGÓGICAS

CURSO DE CAPACITACIÓN DOCENTE:

METODOLOGÍA PARA LA DIDÁCTICA DE LAS UNIDADES DE APRENDIZAJE CURRICULAR (UAC) DE PRIMER SEMESTRE DEL MCCEMS EN TEBAEV

PENSAMIENTO MATEMÁTICO I

Agosto del 2023

CURSO DE CAPACITACIÓN DOCENTE

METODOLOGÍA PARA LA DIDÁCTICA DE LAS UAC (UNIDAD DE APRENDIZAJE CURRICULAR) DE PRIMER SEMESTRE DEL MCCEMS EN TEBAEV

Presentación del curso.

Con motivo de la implementación del nuevo Marco curricular Común de la Educación Media Superior, el Departamento Técnico Pedagógico perteneciente a la Subdirección Técnica de la Dirección General de Telebachillerato, ofrece un curso denominado: "Curso Intensivo para formadores de las Unidades de Aprendizaje Curricular del MCCEMS ". de esta manera sería la:

- La materia y sus interacciones
- Ciencias Sociales I
- Pensamiento Matemático I
- Lengua y comunicación I
- Humanidades I

Este curso taller surge ante la necesidad de capacitar a toda la plantilla docente, respecto a los conocimientos y didáctica de las UAC en la propuesta curricular del MCCEMS. Bajo la perspectiva del MCCEMS, con un modelo pedagógico constructivista, orientado a lograr un desarrollo integral en los jóvenes, a través de un proceso activo de aprendizaje para la vida.

Con una perspectiva de paradigma humanista el estudiante es el protagonista de la educación, vista como una totalidad integral, en donde desarrolle habilidades científicas, intelectuales y tecnológicas, así como, habilidades físicas, sociales y valores morales. De esta manera desarrollar los aprendizajes significativos, tomando como punto de partida la experiencia del estudiante a partir de su contexto, empleando estrategias didácticas de la pedagogía activa y lúdica que permita al estudiante generar su educación de manera creativa.

Para ello se retoman los contenidos de las progresiones de aprendizaje de las guías didácticas, se realizará a través de la implementación de estrategias didácticas, elementos clave para alcanzar las metas de aprendizaje y los conocimientos, multidisciplinares, interdisciplinares y transdisciplinares que propone el MCCEMS.

Propósito general.

Proporcionar a los docentes los elementos conceptuales y didácticos, apegados a las progresiones de aprendizaje del nuevo MCCEMS, de las guías didácticas de primer semestre, con la finalidad de contribuir al reforzamiento de los conocimientos y habilidades de los estudiantes.

INTRODUCCIÓN GENERAL (UAC).

Te damos la más cordial bienvenida a esta tu Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) llamada Pensamiento Matemático I, la cual está enfocada al estudio de la Probabilidad y la Estadística.

Desde el enfoque de la Nueva Escuela Mexicana, el Pensamiento Matemático se presenta como un recurso sociocognitivo, delimitado por aspectos socioemocionales y conectado con las demás áreas del conocimiento, con miras a la formación integral del ser humano.

Con ello, el pensamiento matemático, en el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior posibilita el desarrollo de habilidades relacionadas con la observación, la intuición, la argumentación y la socialización de problemáticas empleando el lenguaje matemático.

Esta nueva perspectiva nos invita a trabajar con aprendizajes de trayectoria, los cuales se alcanzarán al desarrollarse en ustedes estudiantes metas y progresiones de aprendizaje.

Por tanto, esta UAC de Pensamiento Matemático I, está conformada por 15 progresiones, organizadas en 6 módulos.

Módulo 1. Discutiremos la importancia de la toma razonada de decisiones, para valorar la recolección de datos; identificaremos la incertidumbre como consecuencia de la variabilidad y estudiaremos la probabilidad de ocurrencia de un evento.

Módulo 2. Analizaremos las técnicas de conteo con la finalidad de entender que espacios muestrales se requieren y estudiaremos eventos conjuntos y calcularemos su probabilidad.

Módulo 3. Distinguiremos las nociones estadísticas y nos enfocaremos en la identificación de los diferentes tipos de variables. También, analizaremos datos cuantitativos y cualitativos y mostraremos sus diferentes tipos de representaciones.

Módulo 4. Está pensado en el estudio de la relación entre dos variables. Veremos, si son categóricas, la independencia o no entre ellas o, si son cuantitativas, la correlación entre variables. También, veremos cuando algún dato puede considerarse como atípico y como detectar y trabajar con variables de confusión.

Módulo 5. Está destinado al estudio de las técnicas de muestreo. Analizaremos la naturaleza y clasificación del diseño de investigación y ocuparemos los datos recabados para generar medidas estadísticas que resuman la información.

Módulo 6. Estudiaremos las distribuciones de probabilidad, en especial la Distribución Normal, calcularemos probabilidades utilizando sus propiedades y realizaremos inferencias utilizando la prueba de hipótesis.

Como ves, la Estadística y la Probabilidad nos ayudar a tomar decisiones acertadas. Apóyate en ellas. Nuevamente, **¡**Bienvenido y a trabajar**!**

ACREDITACIÓN DEL CURSO.

Para acreditar el curso-taller se requiere la asistencia al 100% de las sesiones programadas, trabajar de forma individual y colaborativa en las actividades diseñadas para cada sesión, además de la autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación que se efectuarán a lo largo del curso.

Los porcentajes que se asignan quedan a consideración del moderador con su grupo de trabajo. Sólo se muestran los rasgos a evaluar:

1. Participación individual.
2. Participación grupal.
3. Evaluación final (coevaluación y autoevaluación).
4. Entrega oportuna de actividades por sesión.
5. Disposición para el trabajo.

Cronograma de actividades

Actividades	Fecha	Horarios	
Inauguración y comida	14 de agosto	14:00	15:00
Plenaria	14 de agosto	15:00	16:00
Sesión 1	14 de agosto	16:00	20:00
Desayuno	15 de agosto	07:00	09:00
Sesión 2	15 de agosto	09:00	14:00
Comida	15 de agosto	14:00	16:00
Sesión 3	15 de agosto	16:00	19:30
Clausura de trabajos	15 de agosto	19:30	20:00

PROGRESIONES DE APRENDIZAJE DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE CURRICULAR (UAC) PENSAMIENTO MATEMÁTICO I

<table>
<tr><td rowspan="4">1</td><td colspan="3">Progresión</td></tr>
<tr><td colspan="3">Discute la importancia de la toma razonada de decisiones, tanto a nivel personal como colectivo, utilizando ejemplos reales o ficticios y de problemáticas complejas que sean significativas para valorar la recolección de datos, su organización y la aleatoriedad.
Se busca llevar al estudiantado a que aprecie el poder de la matemática y el pensamiento estadístico y probabilístico. En este punto no se espera que se resuelvan las problemáticas abordadas.</td></tr>
<tr><td>Metas</td><td>Categorías</td><td>Subcategorías</td></tr>
<tr><td>M1. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.</td><td>C2. Procesos de intuición y razonamiento.</td><td>S1. Capacidad para observar y conjeturar.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="4">2</td><td colspan="3">Progresión</td></tr>
<tr><td colspan="3">Identifica la incertidumbre como consecuencia de la variabilidad y a través de simulaciones considera la frecuencia con la que un evento aleatorio puede ocurrir con la finalidad de tener más información sobre la probabilidad de que dicho evento suceda.</td></tr>
<tr><td>Metas</td><td>Categorías</td><td>Subcategorías</td></tr>
<tr><td>M1. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.

M2. Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación.</td><td>C2. Procesos de intuición y razonamiento.</td><td>S1. Capacidad para observar y conjeturar.
S2. Pensamiento intuitivo.</td></tr>
<tr><td rowspan="6">3</td><td colspan="3">Progresión</td></tr>
<tr><td colspan="3">Identifica la equiprobabilidad como una hipótesis que, en caso de que se pueda asumir, facilita el estudio de la probabilidad y observa que cuando se incrementa el número de repeticiones de una simulación, la frecuencia del evento estudiado tiende a su probabilidad teórica.</td></tr>
<tr><td>Metas</td><td>Categorías</td><td>Subcategorías</td></tr>
<tr><td>M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.</td><td>C1. Procedural.</td><td>S1. Elementos aritmético-algebraicos.

S4. Manejo de datos e incertidumbre.</td></tr>
<tr><td>M1. Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.</td><td>C3. Solución de problemas y modelación.</td><td>S1. Uso de modelos.</td></tr>
<tr><td>M1. Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.</td><td>C4. Interacción y lenguaje matemático.</td><td>S1. Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico.

S2. Negociación de significados.

S3. Ambiente matemático de comunicación.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="6">4</td><td colspan="3">Progresión</td></tr>
<tr><td colspan="3">Elige una técnica de conteo (combinaciones, ordenaciones con repetición, ordenaciones sin repetición, etc.) para calcular el número total de casos posibles y casos favorables para eventos simples con la finalidad de hallar su probabilidad y con ello generar una mayor conciencia en la toma de decisiones.
Las técnicas de conteo se introducen para entender la probabilidad de eventos aleatorios en los que la expresión explícita de su espacio muestral es poco factible.</td></tr>
<tr><td>Metas</td><td>Categorías</td><td>Subcategorías</td></tr>
<tr><td>M2. Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del Pensamiento Matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.

M3 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.</td><td>C1. Procedural</td><td>S1. Elementos aritmético-algebraicos.

S4, Manejo de datos e incertidumbre.</td></tr>
<tr><td>M3. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del Pensamiento Matemático. Áreas de Conocimiento. Recursos Sociocognitivos. Recursos Socioemocionales y de su entorno.</td><td>C3. Solución de problemas y modelación.</td><td>S1. Uso de modelos.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">5</td><td colspan="3">Progresión</td></tr>
<tr><td colspan="3">Observa cómo la probabilidad de un evento puede actualizarse cuando se obtiene más información al respecto y considera eventos excluyentes e independientes para emplearlos en la determinación de probabilidades condicionales.
La introducción de la actualización de probabilidades se hace a través de simulaciones y sólo después se aborda el teorema de Bayes.</td></tr>
<tr><td>Metas</td><td>Categorías</td><td>Subcategorías</td></tr>
<tr><td>M4. Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.</td><td>C2. Procesos de intuición y razonamiento.</td><td>S1. Capacidad para observar y conjeturar.

S2. Pensamiento intuitivo.</td></tr>
</table>

			S3. Pensamiento formal.
6	Progresión		
	Selecciona una problemática o situación de interés, con la finalidad de recolectar información y datos de fuentes confiables e identifica las variables relevantes para su estudio.		
	Metas	Categorías	Subcategorías
	M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	C1. Procedural	S4. Manejo de datos e incertidumbre.
	M1. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	C2. Procesos de intuición y razonamiento.	S1. Capacidad para observar y conjeturar. S2. Pensamiento intuitivo.
	M2 .Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	C4. Interacción y lenguaje matemático.	S3. Ambiente matemático de comunicación.
7	Progresión		
	Analiza datos categóricos y cuantitativos de alguna problemática o situación de interés para el estudiantado, a través de algunas de sus representaciones gráficas más sencillas como las gráficas de barras (variables cualitativas) o gráficos de puntos e histogramas (variables cuantitativas).		
	Metas	Categorías	Subcategorías
	M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno. M2. Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del Pensamiento Matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	C1. Procedural.	S2. Elementos geométricos. S4. Manejo de datos e incertidumbre.
	M2. Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación.	C2. Procesos de intuición y razonamiento.	S1. Capacidad para observar y conjeturar. S2. Pensamiento intuitivo.

<table>
<tr><td rowspan="4">8</td><td colspan="3">Progresión</td></tr>
<tr><td colspan="3">Analiza cómo se relacionan entre sí dos o más variables categóricas a través del estudio de alguna problemática o fenómeno de interés para el estudiantado, con la finalidad de identificar si dichas variables son independientes.</td></tr>
<tr><td>Metas</td><td>Categorías</td><td>Subcategorías</td></tr>
<tr><td>M3. Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.

M4. Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.</td><td>C2. Procesos de intuición y razonamiento.</td><td>S1. Capacidad para observar y conjeturar.

S2. Pensamiento intuitivo.

S3. Pensamiento formal.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">9</td><td colspan="3">Progresión</td></tr>
<tr><td colspan="3">Analiza dos o más variables cuantitativas a través del estudio de alguna problemática o fenómenos de interés para el estudiantado, con la finalidad de identificar si existe correlación entre dichas variables.</td></tr>
<tr><td>Metas</td><td>Categorías</td><td>Subcategorías</td></tr>
<tr><td>M3. Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.
M4. Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.</td><td>C2 . Procesos de intuición y razonamiento.</td><td>S1. Capacidad para observar y conjeturar.

S2. Pensamiento intuitivo.

S3. Pensamiento formal.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">10</td><td colspan="3">Progresión</td></tr>
<tr><td colspan="3">Cuestiona afirmaciones estadísticas y gráficas, considerando valores atípicos (en el caso de variables cuantitativas) y la posibilidad de que existan factores o variables de confusión.</td></tr>
<tr><td>Metas</td><td>Categorías</td><td>Subcategorías</td></tr>
<tr><td>M1. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno</td><td>C2. Procesos de intuición y razonamiento.</td><td>S1. Capacidad para observar y conjeturar.</td></tr>
</table>

	para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.		
	M2. Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	C4. Interacción y lenguaje matemático.	S1. Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico. S3. Ambiente matemático de comunicación.
11	Progresión		
	Identifica, ante la imposibilidad de estudiar la totalidad de una población, la opción de extraer información de ésta a través del empleo de técnicas de muestreo, en particular, valora la importancia de la aleatoriedad al momento de tomar una muestra.		
	Metas	Categorías	Subcategorías
	M1. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	C2. Procesos de intuición y razonamiento.	S1. Capacidad para observar y conjeturar. S2. Pensamiento intuitivo. S3. Pensamiento formal.
	M2. Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	C3. Solución de problemas y modelación.	S2. Construcción de modelos. S3. Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.
12	Progresión		
	Valora las ventajas y limitaciones de los estudios observacionales y los compara con el diseño de experimentos, a través de la revisión de algunos ejemplos tomados de diversas fuentes.		
	Metas	Categorías	Subcategorías
	M1. Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	C4. Interacción y lenguaje matemático.	S3. Ambiente matemático de comunicación.
13	Progresión		
	Describe un fenómeno, problemática o situación de interés para el estudiantado utilizando las medidas de tendencia central (media, mediana y moda) y de dispersión (desviación estándar, varianza, rango intercuartil, etc.) adecuadas al contexto y valora que tipo de conclusiones puede extraer a partir de dicha información.		
	Metas	Categorías	Subcategorías

	M4. Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	C2. Procesos de intuición y razonamiento.	S1. Capacidad para observar y conjeturar. S2. Pensamiento intuitivo. S3. Pensamiento formal.
	M3. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del Pensamiento Matemático, de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno.	C3. Solución de problemas y modelación.	S1. Uso de modelos. S3. Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.
14	Progresión		
	Explica un evento aleatorio cuyo comportamiento puede describirse a través del estudio de la distribución normal y calcula la probabilidad de que dicho evento suceda.		
	Metas	Categorías	Subcategorías
	M4. Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	C2. Procesos de intuición y razonamiento.	S1. Capacidad para observar y conjeturar. S2. Pensamiento intuitivo. S3. Pensamiento formal.
	M3. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del Pensamiento Matemático, de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno.	C3. Solución de problemas y modelación.	S1. Uso de modelos. S3. Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.
15	Progresión		
	Valora la posibilidad de hacer inferencias a partir de la revisión de algunas propiedades de distribuciones y del sentido de la estadística inferencial con la finalidad de modelar y entender algunos fenómenos.		

	Metas	Categorías	Subcategorías
	M3. Comprueba los procedimientos usados en la realización de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	C1. Procedural.	S4. Manejo de datos e incertidumbre.
	M4. Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	C2. Procesos de intuición y razonamiento.	S1. Capacidad para observar y conjeturar. S2. Pensamiento intuitivo. S3. Pensamiento formal.
	M4. Construye y plantea posibles soluciones a problemas de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	C3. Solución de problemas y modelación.	S2. Construcción de modelos. S3. Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Instrucción. Contesta los siguientes cuestionamientos según tu criterio y conocimientos.

1. ¿Qué es el MCCEMS?
2. ¿Menciona cómo está estructurado el curricular fundamental y el curricular ampliado?
3. ¿Qué es la UAC?
4. ¿Cuál es el enfoque pedagógico del MCCEMS?
5. ¿Qué es la progresión de aprendizaje?
6. ¿Cómo conceptualizas la meta de aprendizaje?
7. ¿Qué cambios consideras realizar en tu didáctica para abordar los contenidos de las UAC en la nueva propuesta del MCCEMS?

ESTRUCTURA DEL CURSO

SESIÓN	PROGRESIÓN DE APRENDIZAJE	METAS DE APRENDIZAJE	TEMÁTICAS	ACTIVI-DADES	RECURSOS DIDÁCTICOS	EVALUACIÓN
SESIÓN I	1. Discute la importancia de la toma razonada de decisiones, tanto a nivel personal como colectivo, utilizando ejemplos reales o ficticios y de problemáticas complejas que sean significativas para valorar la recolección de datos, su organización y la aleatoriedad. 2. Identifica la incertidumbre como consecuencia de la variabilidad y a través de simulaciones considera la frecuencia con la que un evento aleatorio puede ocurrir con la finalidad de tener más información sobre la probabilidad de que dicho evento suceda. Identifica la equiprobabilidad como una hipótesis que, en caso de que se pueda asumir, facilita el estudio de la	M1 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo. M1 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo. M2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación. M1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las	Toma de decisiones. Nociones de probabili-dad. Probabili-dad frecuencial Probabili-dad clásica	Tirar penal-tis. Investi gación docu-mental	Pelota Libreta Antología	

	probabilidad y observa que cuando se incrementa el número de repeticiones de una simulación, la frecuencia del evento estudiado tiende a su probabilidad teórica.	ciencias y de su entorno. M1 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto. M1 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.				
SESIÓN II	Elige una técnica de conteo (combinaciones, ordenaciones con repetición, ordenaciones sin repetición, etc.) para calcular el número total de casos posibles y casos favorables para eventos simples con la finalidad de hallar su probabilidad y con ello generar una mayor conciencia en la	M2 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimien-tos algorítmicos propios del Pensamiento Matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto. M3 Comprueba los procedimien-tos usados en	Técnicas de conteo. Diagrama de árbol. Principio multiplicativo. Principio aditivo. Factorial. Permuta-ciones. Permuta-ciones con elementos indistingui-bles. Permuta-ciones con repetición. Combina-	Ver video. Investi gación docu-mental	Antología	

	toma de decisiones. Observa cómo la probabilidad de un evento puede actualizarse cuando se obtiene más información al respecto y considera eventos excluyentes e independientes para emplearlos en la determinación de probabilidades condicionales.	la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares. M3 Aplica procedimiento s, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del Pensamiento Matemático, de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocog-nitivos. Recursos Socioemo-cionales y de su entorno. M4 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	ciones. Combina-ciones con repetición. Probabili-dad conjunta. Probabili-dad para eventos mutuamen-te exclu-yentes. Probabili-dad para eventos no excluyen-tes. Probabili-dad para eventos indepen-dientes. Probabili-dad para eventos dependien-tes. Probabili-dad condicio-nal. Teorema de Bayes.			
SESIÓN III	Progresiones restantes por participantes					Exposición

SESIÓN I

Propósito de la Sesión

Presentar el impacto que tiene el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS) de la Nueva Escuela Mexicana (NEM) en la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) de Pensamiento Matemático I.

Abordar los contenidos de las progresiones 1, 2 y 3 de la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) de Pensamiento Matemático I, de forma que se conozca la metodología e intención implementada por el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS) en la Nueva Escuela Mexicana (NEM).

Progresiones de aprendizaje

1. Discute la importancia de la toma razonada de decisiones, tanto a nivel personal como colectivo, utilizando ejemplos reales o ficticios y de problemáticas complejas que sean significativas para valorar la recolección de datos, su organización y la aleatoriedad.
Se busca llevar al estudiantado a que aprecie el poder de la matemática y el pensamiento estadístico y probabilístico. En este punto no se espera que se resuelvan las problemáticas abordadas.

2. Identifica la incertidumbre como consecuencia de la variabilidad y a través de simulaciones considera la frecuencia con la que un evento aleatorio puede ocurrir con la finalidad de tener más información sobre la probabilidad de que dicho evento suceda.

3. Identifica la equiprobabilidad como una hipótesis que, en caso de que se pueda asumir, facilita el estudio de la probabilidad y observa que cuando se incrementa el número de repeticiones de una simulación, la frecuencia del evento estudiado tiende a su probabilidad teórica.

Meta(s) de aprendizaje

- Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.
- Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación.
- Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.
- Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.
- Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.

Categorías o Concepto Central.

C1 Procedural.

C2 Procesos de intuición y razonamiento.

C3 Solución de problemas y modelación.

C4 Interacción y lenguaje matemático.

Introducción

En este módulo nos enfocaremos en el estudio de la toma de decisiones y como nos puede ayudar, de una manera objetiva, a solucionar situaciones que se nos presente. Veremos la importancia de la recolección y organización de datos para obtener la posibilidad de que un determinado suceso ocurra.

También, identificaremos que la variabilidad forma parte de nuestra vida, y esto genera incertidumbre. Veremos la forma en cómo podemos trabajar con ella para tomar decisiones acertadas.

Por último, estudiaremos la probabilidad de que un determinado suceso ocurra y veremos los enfoques que le dan sustento. Todo esto con miras a observar y obtener información de una situación para obtener estrategias que ayuden a explicarla, desarrollando la percepción e intuición, apoyados en la resolución de problemas para dar significado de acuerdo con el contexto.

Temáticas

Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS)

Currículum Fundamental

Programa de estudios del Recurso Sociocognitivo Pensamiento Matemático I

SEMESTRE	Primero	
CRÉDITOS	8 créditos	
COMPONENTE	Componente de Formación Fundamental	
HORAS	**SEMESTRALES**	**SEMANALES**
	64 horas	4 horas

La finalidad de la Educación Media Superior es formar personas capaces de reflexionar sobre su vida para conducirla en el presente y en el futuro con bienestar y satisfacción, con sentido de pertenencia social, conscientes de los problemas de la humanidad, dispuestos a participar de manera responsable y decidida en los procesos de democracia participativa, comprometidos con las mejoras o soluciones de las situaciones o problemáticas que existan y que desarrollen la capacidad de aprender a aprender en el trayecto de su vida. En suma, que sean adolescentes, jóvenes y personas adultas capaces de erigirse como agentes de su propia transformación y de la sociedad, y que con ello fomenten una cultura de paz y de respeto hacia la diversidad social, sexual, política y étnica, siendo solidarios y empáticos con las personas y grupos con quienes conviven.

Por ello, es preciso contar con un Marco Curricular Común para la Educación Media Superior (MCCEMS) centrado en el desarrollo integral de las y los adolescentes y jóvenes, diseñado y puesto en práctica desde la inclusión, participación, colaboración, escucha y construcción colectiva que responde y atiende los mandatos de la reforma al Artículo 3o. Constitucional, la Ley General de Educación y los principios de la Nueva Escuela Mexicana.

En el MCCEMS se hace explícito el papel de las y los docentes como diseñadores didácticos, innovadores educativos y agentes de transformación social con autonomía didáctica, trascendiendo su papel de operadores de planes y programas de estudio. La autonomía didáctica es la facultad que se otorga a las y los docentes para decidir, con base en un contexto, las estrategias pedagógicas y didácticas que utilizarán para lograr las metas de aprendizaje establecidas en las progresiones (SEP, 2022).

El centro del MCCEMS lo constituyen los Recursos Sociocognitivos para lograr en el alumnado el mejor desempeño en la comunicación, expresión oral, escritura y pasión por la lectura; en el pensamiento matemático, la conciencia histórica y la cultura digital.

El Recurso Sociocognitivo de Pensamiento Matemático se concibe de manera amplia, incluyendo la ejecución procedimental de algoritmos, la interpretación de sus resultados, y abarcando procesos intuitivos y formales como la observación, el acto de conjeturar y la argumentación, así como también la solución de problemas, la modelación de la realidad y la comunicación en contextos matemáticos.

La matemática se desarrolla en un proceso dialéctico entre la intuición y la formalidad. Todo descubrimiento parte de la intuición hasta que se vuelve necesario, para poder continuar, formalizar los resultados obtenidos. Con la consideración de estos procesos intuitivos, clásicamente descuidados en la educación matemática, se busca favorecer el pensamiento creativo de las y los estudiantes. También se pone el acento en que el estudiantado desarrolle la habilidad de determinar y delimitar qué variables debe considerar para describir un fenómeno y que no simplemente se limite a la utilización de modelos prefabricados, además de que se busca en el estudiantado el desarrollo de habilidades comunicativas relacionadas con el Pensamiento Matemático.

En el MCCEMS se trabajará con Unidades de Aprendizaje Curricular (UAC) que, en apego al Acuerdo secretarial número 17/08/22, se definen como un conjunto de aprendizajes que integran una unidad completa que tiene valor curricular porque ha sido objeto de un proceso de evaluación, acreditación y/o certificación para la asignación de créditos. Estas UAC pueden ser cursos, asignaturas, materias, módulos u otros que representen aprendizajes susceptibles de ser reconocidos por su valor curricular. Cada UAC enmarca los contenidos y habilidades que darán cumplimiento a la formación de las y los estudiantes de EMS y serán desarrollados a través de las progresiones de aprendizaje.

El Recurso Sociocognitivo de Pensamiento Matemático se encuentra integrado por tres UAC, a desarrollarse en tres semestres (ver tabla 1).

Tabla 1. Unidades de Aprendizaje Curricular por semestre, horas y créditos

Unidades de Aprendizaje Curricular	Semestre *	Horas semanales			Horas semestrales			Créditos
		MD	EI	Total	MD	EI	Total	
Pensamiento Matemático I	Primero	4 horas	1 hora	5 horas	64 horas	16 horas	80 horas	8 créditos
Pensamiento Matemático II	Segundo	4 horas	1 hora	5 horas	64 horas	16 horas	80 horas	8 créditos
Pensamiento Matemático III	Tercero	4 horas	1 hora	5 horas	64 horas	16 horas	80 horas	8 créditos

*De acuerdo con el mapa curricular de cada servicio educativo.
MD: Mediación docente. EI: Estudio Independiente

En el presente documento se describe la UAC correspondiente a Pensamiento Matemático I a desarrollarse durante el primer semestre.

II. Aprendizajes de trayectoria

Los aprendizajes de trayectoria que se desarrollan a lo largo de las UAC responden a las preguntas ¿qué tipo de persona pretendemos formar? y ¿en qué contribuye el área o recurso en la formación integral de las y los jóvenes que cursen este tipo educativo?

Los aprendizajes de trayectoria de Pensamiento Matemático describen la formación que buscamos ofrecer a las y los estudiantes que cursen por el MCCEMS, la cual pretende aportar herramientas y habilidades, como lo son la capacidad para observar, intuir, conjeturar, argumentar, modelar, entre otras, que les serán de utilidad sin importar el derrotero que sea elegido al terminar el bachillerato.

El perfil de egreso de las y los estudiantes, en el Recurso Sociocognitivo de Pensamiento Matemático queda referido en el currículum bajo los siguientes aprendizajes de trayectoria:

1. Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados, para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.

2. Adapta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades, y de la vida cotidiana).

3. Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.

4. Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.

III. Progresiones de aprendizaje, metas, categorías y subcategorías

Los elementos del MCCEMS que dan respuesta a las preguntas ¿qué se enseña? Y ¿qué se aprende?, son las progresiones de aprendizaje, las metas, las categorías y las subcategorías.

En el programa de Pensamiento Matemático I se abordan 15 progresiones de aprendizaje que tienen impacto en el logro de las metas de aprendizaje clasificadas utilizando las cuatro categorías y empleando algunas de sus subcategorías. Las metas de aprendizaje de Pensamiento Matemático refieren a lo que se espera que el estudiantado aprenda durante la trayectoria de la UAC.

Cada progresión de aprendizaje articula los contenidos y habilidades del Pensamiento Matemático que deberán abordarse a lo largo del semestre y buscarse desarrollar en el estudiantado. Las categorías y subcategorías orientan la práctica docente hacia el favorecimiento de este tipo de pensamiento en las y los estudiantes. Cada progresión tiene asociada una o más metas de aprendizajes, las cuales no tienen por qué leerse como una camisa de fuerza sino como una sugerencia orientadora, por eje rector de una práctica exitosa se tiene que buscar un equilibrado trabajo en cada una de las cuatro categorías del pensamiento matemático a lo largo del semestre.

Las progresiones de aprendizaje de Pensamiento Matemático cuentan con anotaciones didácticas, las cuales son sugerencias para su abordaje. En el caso de Pensamiento Matemático I, de las anotaciones didácticas se deduce el enfoque adecuado para trabajar el pensamiento estadístico y probabilístico en primer semestre, a saber, aquel enfoque basado en las simulaciones de eventos aleatorios y el acercamiento a la probabilidad a través de frecuencias. Estas anotaciones pueden encontrarse en el documento de Progresiones de Aprendizaje del Recurso Sociocognitivo Pensamiento Matemático y son fundamentales para lograr dimensionar el nivel con que se estará abordando cada progresión. En la siguiente liga se encuentra el documento antes referido, así como también el documento de Orientaciones Pedagógicas del Recurso Sociocognitivo de Pensamiento Matemático: https://tinyurl.com/2kjlfhnv.

Con el planteamiento de las progresiones de aprendizaje se especifica el qué enseñar, aprender y el qué desarrollar en Pensamiento Matemático para todos los subsistemas de la EMS en el país, sin hacer distinción de las modalidades del bachillerato.

Temario de Pensamiento Matemático I

Pensamiento Matemático I	
Módulo	**Progresiones/Temario**
1. Toma de Decisiones y Probabilidad.	1. Toma de decisiones. Implicaciones 2. Variabilidad y nociones probabilísticas. Nociones de probabilidad Probabilidad frecuencial 3. Probabilidad teórica y subjetiva. Probabilidad clásica Probabilidad subjetiva Aprendizajes de trayectoria: Números reales, proporciones, porcentajes y fracciones.
2. Técnicas de conteo, Probabilidad Conjunta y Probabilidad Condicional.	4. Técnicas de conteo. Diagrama de árbol Principio multiplicativo Principio aditivo Factorial Permutaciones Permutaciones con elementos indistinguibles Permutaciones con repetición Combinaciones Combinaciones con repetición 5. Probabilidad conjunta y probabilidad condicional. Probabilidad conjunta Probabilidad para eventos mutuamente excluyentes Probabilidad para eventos no excluyentes Probabilidad para eventos independientes Probabilidad para eventos dependientes Probabilidad condicional Teorema de Bayes
3. Estadística y sus representaciones.	6. Nociones estadísticas y recolección de datos . Dato Población Muestra Variable Clasificación de variables Técnicas de recolección de datos Encuesta Entrevista Observación Experimentación Documental 7. Tablas y gráficas Tablas estadísticas Distribución de frecuencias para datos no agrupados Distribución de frecuencias para datos agrupados Gráficas estadísticas Gráfica de barras Histograma

	Polígono de frecuencias Ojiva Diagrama circular
4. Análisis bivariado.	8. Independencia de variables Tablas de contingencia Ji-cuadrada 9. Correlación de variables Diagrama de dispersión Coeficiente de Pearson Aprendizajes de trayectoria: Rectas en el plano 10. Valores atípicos y variables de confusión Valores atípicos Variables de confusión Paradoja de Simpson
5. Técnicas de muestreo, diseño de investigación y medidas estadísticas.	11. Técnicas de muestreo Muestreo probabilístico Muestreo aleatorio simple Muestreo sistemático Muestreo estratificado Muestreo por conglomerados Muestreo no probabilístico Muestreo por conveniencia Muestreo bola de nieve 12. Diseños de investigación Estudios observacionales Diseño de experimentos 13. Medidas estadísticas Medidas de tendencia central Media aritmética Mediana Moda Medidas de dispersión Varianza Desviación estándar Medidas de posición Cuartiles Deciles Percentiles
6. Distribución normal de probabilidad e Inferencia estadística.	14. Distribuciones de probabilidad Distribución normal Distribución normal estándar 15. Inferencia estadística Prueba de hipótesis

MODULO I. TOMA DE DECISIONES Y PROBABILIDAD

1

Discute la importancia de la toma razonada de decisiones, tanto a nivel personal como colectivo, utilizando ejemplos reales o ficticios y de problemáticas complejas que sean significativas para valorar la recolección de datos, su organización y la aleatoriedad.
Se busca llevar al estudiantado a que aprecie el poder de la matemática y el pensamiento estadístico y probabilístico. En este punto no se espera que se resuelvan las problemáticas abordadas.

METAS	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
M1 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	**C2** Procesos de intuición y razonamiento.	**S1** Capacidad para observar y conjeturar.

Actividad

Construye tu proyecto transversal.

¿Conocen el juego llamado futbol, y en ese juego, saben que es un penalti?

a) Todo el grupo se dividirá en dos equipos, cada equipo debe estar equilibrado entre hombres y mujeres.

b) Jugarán equipo 1 contra equipo 2, para lo cual tirarán una serie de penales en la cancha. Deberán llevar un registro de penales anotados y fallados.

c) En el momento que indique el instructor, respondan las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo decidieron formar los equipos?
2. ¿Fue difícil la decisión de elegir qué jugadoras y jugadores formaban cada equipo?
3. ¿Cuántas veces jugaron en total?
4. ¿Cuántas veces anotó el equipo 1? ¿Cuántas falló?

5. ¿Cuántas veces anotó el equipo 2? ¿Cuántas falló?

6. ¿Cuál crees que sea la probabilidad de que, el siguiente penalti tirado por el equipo 1 sea gol?

7. ¿Cuál crees que sea la probabilidad de que, el siguiente penalti tirado por el equipo 2 sea gol?

d) Presenten sus conclusiones al grupo.

1. Toma de decisiones.

La toma de decisiones forma parte de nuestra vida cotidiana más de lo que comúnmente creemos, ya que va desde elegir la ruta que tomaremos para ir a la escuela, la ropa que utilizaremos para determinada ocasión o hasta decidir si nos vacunamos o no contra cierta enfermedad.

Toma en consideración que:
La toma de decisiones es el proceso mediante el cual se realiza una elección entre diversas alternativas disponibles.

Por ejemplo, hoy en día es muy común entre jóvenes el uso de las redes sociales, que son aplicaciones digitales conformadas por personas con intereses en común, creando entre la juventud diversos tipos de relaciones y permitiendo la comunicación, el intercambio de información e inclusive el esparcimiento. Las más populares actualmente son Facebook, Twitter, TikTok, Instagram, YouTube, entre otras.

Logotipos de algunas redes sociales

Sin embargo, te has dado cuenta de que, muchas de estas redes, cuando te recomiendan una película, sugieren una canción u ofrecen un producto, entre un universo de opciones muy distintas entre sí, pareciera que te están "leyendo la mente", al presentarte artículos (películas, canciones, productos) que te llaman poderosamente la atención y, por tanto, estarías dispuesto a comprar o consumir.

Esta información no ha sido elegida de forma aleatoria; aquí se utilizan muchas herramientas matemáticas, como el cálculo de probabilidades y el manejo estadístico de datos. Dichas aplicaciones cuentan con algoritmos que procesan una gran cantidad de datos individuales e interpretan la variabilidad de información para personalizar al máximo lo que te ofrecerán a ti y a cada uno de sus usuarios. Toda esta Inteligencia Artificial aplicada en las redes sociales tiene el objetivo, en lo general, de apoyar a la toma de decisiones, y en lo particular, permanezcan en las apps el mayor tiempo posible.

Otro ejemplo sobre como las matemáticas nos apoyan a tomar decisiones es el cálculo del tiempo de vida de una persona. Es un misterio saber con exactitud el tiempo que nos queda por vivir, sin embargo, sí es posible predecir la esperanza de vida de los seres humanos.

Esperanza de vida

La esperanza de vida muestra el promedio de años que le restan a las personas en una etapa de su existencia, en el supuesto que, en el futuro, no existan cambios variacionales (como siniestros, enfermedades, accidentes, etc.) que la modifiquen. Por ejemplo, en un determinado país, las mujeres que acaban de cumplir 50 años vivirán un promedio de 20.3 años más; en ese mismo país, un varón recién nacido vivirá un promedio de 67.8 años. Queda claro que, si consideramos cualquier persona individualmente, ésta puede sobrepasar este valor o no llegar a él, es decir, habrá variabilidad entre las edades; sin embargo, en promedio, la esperanza de vida de las mujeres en ese país es de 70.3 años, mientras que la de los hombres es de 67.8 años.

Para calcular la esperanza de vida se requiere de analizar e interpretar diversas variables asociadas, como factores genéticos, ambientales, acceso a servicios sanitarios, agua potable, inclusive hábitos como la alimentación, el ejercicio, etc. Está comprobado que entre mejores hábitos se tengan, la esperanza de vida será mayor y, para tener buenos hábitos, es necesario tomar decisiones acertadas que ayuden a aumentar la calidad de vida.

Decidir tener buenos hábitos aumenta la esperanza de vida

Apliquemos lo aprendido:
1. Escribe en tu libreta tres situaciones, de preferencia experiencias personales:
a) La primera donde quede de manifiesto una situación problemática cotidiana que te haya sucedido y que no fue muy complicada la toma de decisiones que utilizaste para resolverla.
b) La segunda donde se manifieste otra situación pero que la decisión que tomaste para resolver sea, desde tu óptica, de gran impacto y repercusión.
c) La tercera donde tomaron alguna decisión entre varios compañeros y menciona como llegaron a un acuerdo.

En estos ejemplos podemos apreciar la necesidad del ser humano de querer interpretar la variabilidad de información que se presenta en su entorno para utilizarla en algún momento de su existencia. Como te darás cuentas, la estadística, la probabilidad y en lo general, las matemáticas, influyen en la vida para la toma de decisiones, desde lo común y cotidiano hasta cuestiones relevantes y trascendentes, pero ¿cómo podemos, entre la gran cantidad de situaciones que se nos presentan, tomar "decisiones acertadas" y así, minimizar la incertidumbre que esto nos genera?

Implicaciones

Toda decisión que tomemos podemos catalogarla como acertada o errónea y, cualquiera que fuera ésta, nos generará un cierto grado de aprendizaje. Para poder tomar el camino de una acertada, conviene primero entender que existen diversos procesos en la toma de decisiones, los más comunes son:

- Racionales (elecciones lógicas y secuenciales, basadas en fuentes y pruebas comprobables).
- Intuitivos (elecciones basadas en la experiencia personal y su intuición).
- De rutina (elecciones estandarizadas en respuesta a problemas conocidos y periódicos).
- De emergencia (elecciones tomadas frente a una situación nueva y excepcional).
- Innovadores (elecciones basadas en el descubrimiento, identificación y diagnóstico de problemas inusuales, requiriendo soluciones creativas).

Independientemente del proceso que sigamos, toda toma de decisiones tiene una determinada estructura:

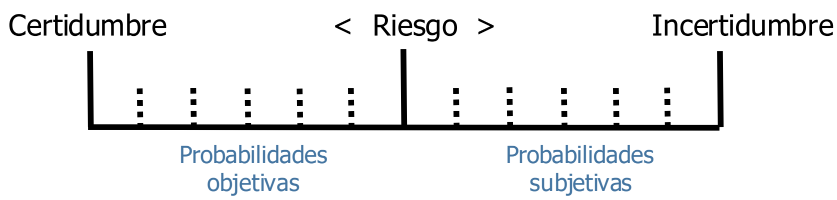
a) Iniciamos identificando la necesidad de resolver un problema;
b) Se analiza y pondera el problema;
c) Desarrollamos alternativas de solución;
d) Evaluamos dichas alternativas y;
e) Tomamos la decisión basada en dicha evaluación.

Ahora, las *condiciones* en las que se toman decisiones también se deben tener en cuenta. Estas son de certidumbre, de riesgo o de incertidumbre:

- La certidumbre es la condición en la que los tomadores de decisiones están plenamente informados sobre la situación o problema, las posibles soluciones son obvias y el resultado de cada decisión es claro (aquí, la variabilidad de los datos es prácticamente nula)

- El riesgo es la condición en la que las personas pueden definir un problema, especificar la probabilidad de algunos hechos o eventos, identificar soluciones alternativas y evaluar la posibilidad de los posibles resultados (aquí la variabilidad de los datos existe, pero es cuantificable)
- La incertidumbre es la condición en la que un individuo no dispone de información necesaria para asignar probabilidades a los resultados de las diversas soluciones con las que se pueda encontrar (aquí, la variabilidad de los datos es muy difícil cuantificarla objetivamente).

Con esto podemos inferir que el tipo, la cantidad y la confiabilidad de la información que se disponga, influyen en el nivel de riesgo que se tiene al tomar una decisión. Si basamos la posibilidad de que ocurra un resultado específico con base en hechos y números concretos, estaremos apoyándonos en la probabilidad objetiva, pero si nuestra percepción, juicio y opinión personal influyen en la toma de decisiones, estaremos utilizando la probabilidad subjetiva.



Condiciones al momento de tomar decisiones.

Sería ideal contar siempre con condiciones de certidumbre absoluta para toda decisión. Sin embargo, en la vida real, muy pocas decisiones se toman así, por lo que es necesario asumir ciertos riesgos al hacer una elección. Este riesgo resulta ser menor, si se fundamenta en procesos estadísticos y probabilísticos, (como la recolección de información, la clasificación y organización de datos, la visualización de evidencia, la cuantificación de la variabilidad, la asignación de posibilidades, etc.), por lo que, entre más objetivos seamos, contando en la medida de lo posible con información certera y suficiente, la probabilidad de acertar en nuestras decisiones será cada vez mayor.

Es por ello por lo que abordaremos el razonamiento probabilístico y estadístico con miras a responder la necesidad de tomar decisiones basadas en estudio de la variabilidad.

Toma en consideración que:
La variabilidad es la dispersión de los valores que los datos pueden arrojar, de manera que puedas emplear modelos para analizar y resolver situaciones, interpretar sus posibles soluciones y elaborar conclusiones basadas en el contexto presentado.

¡A trabajar en tu proyecto transversal!
Es momento de realizar los incisos a), b), c) y d) de tu proyecto transversal.

2

Identifica la incertidumbre como consecuencia de la variabilidad y a través de simulaciones considera la frecuencia con la que un evento aleatorio puede ocurrir con la finalidad de tener más información sobre la probabilidad de que dicho evento suceda.

METAS	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
M1 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo. **M2** Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación.	**C2** Procesos de intuición y razonamiento.	**S1** Capacidad para observar y conjeturar. **S2** Pensamiento intuitivo.

Proyecto transversal.

Si alguien nos preguntará que, entre Leonel Messi y Cristiano Ronaldo, quién es mejor cobrador de penales en su equipo y quien es mejor cobrador de penales en su selección, ¿podríamos darle alguna respuesta?

Cristiano Ronaldo y Lionel Messi.

a) Todo el grupo realizará una investigación documental, recolectarán datos sobre los penales ejecutados por cada uno de ellos, cuantos fueron gol y cuantos no lo fueron; esto, en cada uno de los equipos que han jugado y en su selección.

2. Variabilidad y nociones probabilísticas.

Como ya lo hemos visto, en nuestra vida cotidiana nos enfrentamos a situaciones que involucran acciones propias de la casualidad, la variabilidad y la toma de decisiones, o ¿alguna vez no te ha sucedido que pronosticaron un día lluvioso, te vistes de acuerdo a la ocasión y resulta que ese día fue caluroso? o ¿tu equipo favorito, el cual va último de la liga, gana con el equipo que va en primer lugar? o ¿conoces que anuncian un medicamento experimental que sería eficaz contra una cierta enfermedad pero además, en la práctica, ayudó también a combatir otra que no estaba contemplada?

Es decir, en el mundo real encontramos *variabilidad, riesgo y azar*. Las situaciones son tan diversas y sus posibles resultados también, como el lanzamiento de un dado, hasta problemas específicos en campos como la medicina, la economía, las ciencias, etc. Estos escenarios implican la predicción de lo que sucederá en circunstancias donde se incluyen elementos conocidos y elementos aleatorios.

Toma en consideración que:
La palabra aleatorio proviene del latín *alea*, que significa suerte o azar.

Nociones de probabilidad.

Existe una rama de las matemáticas encargada de estudiar la posibilidad de que un determinado evento ocurra. Dicha rama se le conoce como *probabilidad*. Así, para entrar en su estudio, es necesario conocer algunas nociones previas.

Experimento. Es cualquier acción u operación bien definida. Se divide en experimento determinista y experimento aleatorio.

Experimento determinista. Un experimento es determinista cuando, realizado en las mismas condiciones, se obtienen siempre el mismo resultado.

Experimento aleatorio. Un experimento es aleatorio cuando, realizado en las mismas condiciones, no podemos conocer con exactitud el resultado, ya que éste depende del azar.

Espacio muestral. Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento.
Se representa por la letra S o por la letra Ω. Por ejemplo, si el experimento consiste en lanzar un dado, los posibles resultados que se pueden obtener son 1, 2, 3, 4, 5 o 6 por lo que el espacio muestral de lanzar un dado es $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Cardinalidad del espacio muestral. Es la cantidad de elementos que contiene el espacio muestral.
Por ejemplo, si el experimento consiste en lanzar una moneda, el espacio muestral es $S = \{águila, sol\}$ y su cardinalidad es 2, denotada por $card(S) = 2$ es decir el espacio muestral está formado por 2 elementos.

Elementos. Los elementos son cada uno de los resultados posibles de un experimento.
Así, si el experimento consiste en lanzar una moneda al aire, los posibles resultados que podemos obtener son águila o sol. Cada uno de ellos es un elemento y en su conjunto, forman el espacio muestral.

Evento. Un evento o suceso, es un subconjunto del espacio muestral y generalmente lo que queremos conocer o calcular. Dicho evento puede estar formado por uno o varios elementos del espacio muestral.

Por ejemplo, si el experimento consiste en lanzar un dado, un evento A podría ser que salga en la cara superior el número 2, mientras que un evento B podría ser que salga en la cara superior un número impar.

Experimento: Lanzar un dado
Espacio muestral: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Evento A: Salga en la cara superior el número 2: $A = \{2\}$
Evento B: Salga en la cara superior un número impar: $B = \{1, 3, 5\}$
Cardinalidad del espacio muestral: $card(S) = 6$
Cardinalidad del evento A: $card(A) = 1$
Cardinalidad del evento B: $card(B) = 3$

Como te puedes dar cuenta, al lanzar un dado es factible que el resultado sea un número 2. También es factible que el resultado sea un número impar. A este tipo de eventos se les denomina *eventos posibles*.

Existe otro tipo de evento, llamado *evento imposible*, el cual no cuenta con elementos y se le denota por el símbolo Ø (conjunto vacío). Si continuamos con el experimento de lanzar un dado y si por alguna razón quisiéramos que el evento C sea que se obtenga un número mayor que 8, podrás notar que dicho evento no contendría ningún elemento, ya que el espacio muestral contiene números del 1 al 6 solamente.

Experimento: Lanzar un dado
Espacio muestral: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Evento C: Salga en la cara superior un número mayor que 8: $C = \{\varnothing\}$

También hay otro tipo de evento, llamado *evento seguro*, que está formado por todos los posibles resultados del experimento. Continuando con el experimento de lanzar un dado, y nuestro evento D sea que se obtenga un número natural menor que 7, podrás notar que dicho evento contendrá a todos los elementos del espacio muestral.

Experimento: Lanzar un dado
Espacio muestral: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Evento D: Salga en la cara superior un número natural menor que 7:
$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

> Toma en consideración que:
> Ten en cuenta que un evento imposible se denota por el símbolo Ø (conjunto vacío) y no por el número 0 (cero). Por ejemplo, si un experimento consistiera en verificar el número de aciertos en una prueba de 5 reactivos tendríamos que el espacio muestral es $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Así el evento A "obtener ningún acierto" y el evento B "obtener 10 aciertos" son dos eventos distintos y se denotarían como $A = \{0\}$ y $B = \{\varnothing\}$ respectivamente.

Estos eventos, al formar parte de un experimento aleatorio, son también *eventos aleatorios.* Un *evento determinista* es aquel resultado de un experimento determinista. Por ejemplo, si el experimento es “meter la mano en agua” y nuestro evento E es “la mano se mojará”, el espacio muestral tendrá un único resultado o evento: la mano se mojará; este resultado es seguro. De esta forma, el evento es un evento determinista.

La probabilidad tiene su base en los conceptos antes vistos. Ahora, existen varias formas de asignarla:

- Si lo que se quiere es trabajar con probabilidades objetivas para disminuir el riesgo y tomar mejores decisiones, los enfoques a utilizar son el frecuencial y el clásico.
- En caso de que no podamos utilizar la probabilidad objetiva, recurriríamos al enfoque subjetivo.

Probabilidad frecuencial.

La probabilidad frecuencial, cuantifica el grado de ocurrencia de un evento de manera empírica (a posteriori, es decir, después de que el experimento se realizó). De esta manera, permite predecir la posibilidad de ocurrencia de muchos fenómenos cotidianos por medio de la frecuencia de un evento observado. Es aplicable cuando el número de resultados de un experimento es infinito, no ha concluido o no son igualmente probables. Su probabilidad de ocurrencia es la razón entre la frecuencia de ocurrencia de dicho evento con el número de ensayos realizados.

$$P(A)=\frac{\textit{Número de casos favorables al evento A}}{\textit{Número de veces que se repitió el experimento}}$$

La ocurrencia de un evento A no puede ser cualquier número, sino debe de ser un número real P mayor o igual que cero, pero menor o igual que uno, $0 \le P(A) \le 1$. El cero indica la imposibilidad de ocurrencia del evento A y el uno indica la certidumbre de que ocurra.

Por ejemplo, en estos tiempos, es muy común la comparación entre quien es el mejor futbolista de la actualidad, si Lionel Messi o Cristiano Ronaldo. Para poder responder esta interrogante, especialistas han evaluado muchas variables, como juegos jugados, campeonatos obtenidos, goles anotados, asistencias etc., y, aun así, no han podido llegar a un consenso general. Esto se debe a que ambos son muy buenos atletas, pero también influye el gusto personal por el estilo de juego de uno u otro jugador. Sin embargo, si alguien nos preguntará que, entre ellos dos, quién es mejor cobrador de penales en su equipo y quien es mejor cobrador de penales en su selección, ¿podríamos darle alguna respuesta?

Cristiano Ronaldo y Lionel Messi.

Claro que sí. Primero recolectemos datos sobre los penales ejecutados por cada uno de ellos, cuantos fueron gol y cuantos no lo fueron y organicémoslos para poder visualizar la evidencia con la que contamos:

Penales de Lionel Messi *			
Equipo	Ejecutados	Anotados	Fallados
Barcelona	107	82	25
PSG	4	3	1
Total equipos	**111**	**85**	**26**
Selección			
Argentina	**37**	**31**	**6**

Penales de Cristiano Ronaldo *			
Equipo	Ejecutados	Anotados	Fallados
Manchester United	29	24	5
Real Madrid	94	80	14
Juventus	34	29	5
Al-Nassr	2	2	0
Total equipos	**159**	**135**	**24**
Selección			
Portugal	**27**	**20**	**7**

Con el Sporting no ejecutó ningún penal

* Datos tomados al 22 de febrero de 2023

Para poder compararlos, resulta conveniente verificar la efectividad en la realización de los penales, es decir, cuantos penales fueron goles con respecto a los penales tirados.

Efectividad al tirar penales en los equipos que ha jugado.	
Lionel Messi	**Cristiano Ronaldo**
Experimento: Tirar un penal por Lionel Messi Espacio muestral: Representa el total de penales ejecutados por Lionel Messi en los equipos que ha jugado Evento A: Goles convertidos por penal en los equipos que ha jugado $P(A)=\frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ A}{Número\ de\ veces\ que\ se\ repitió\ el\ experimento}$ $P(A)=\frac{85}{111}$ $P(A)=0.7658$ Así, la efectividad de Lionel Messi al tirar penales y anotar gol en los equipos que ha estado es del 76.58%.	Experimento: Tirar un penal por Cristiano Ronaldo Espacio muestral: Representa el total de penales ejecutados por Cristiano Ronaldo en los equipos que ha jugado Evento B: Goles convertidos por penal en los equipos que ha jugado $P(B)=\frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ B}{Número\ de\ veces\ que\ se\ repitió\ el\ experimento}$ $P(B)=\frac{135}{159}$ $P(B)=0.8491$ Así, la efectividad de Cristiano Ronaldo al tirar penales y anotar gol en los equipos que ha estado es del 84.91%.
Efectividad al tirar penales en la selección de su país.	
Lionel Messi	**Cristiano Ronaldo**
Experimento: Tirar un penal por Lionel Messi Espacio muestral: Representa el total de penales ejecutados por Lionel Messi en su selección Evento C: Goles convertidos por penal en su selección $P(C)=\frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ C}{Número\ de\ veces\ que\ se\ repitió\ el\ experimento}$ $P(C)=\frac{31}{37}$ $P(C)=0.8378$ Así, la efectividad de Lionel Messi al tirar penales y anotar gol en su selección es del 83.78%.	Experimento: Tirar un penal por Cristiano Ronaldo Espacio muestral: Representa el total de penales ejecutados por Cristiano Ronaldo en su selección Evento D: Goles convertidos por penal en su selección $P(D)=\frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ D}{Número\ de\ veces\ que\ se\ repitió\ el\ experimento}$ $P(D)=\frac{20}{27}$ $P(D)=0.7407$ Así, la efectividad de Cristiano Ronaldo al tirar penales y anotar gol en su selección es del 74.07%.

En este ejemplo, utilizamos las frecuencias relativas[1] de penales anotados entre penales ejecutados para poder llegar a la conclusión de que, entre Cristiano Ronaldo y Lionel Messi, hasta el 22 de febrero de 2023, Cristiano Ronaldo es mejor cobrador de penales en su equipo y que Lionel Messi es mejor cobrador de penales en su selección. Queda claro que, como son jugadores en activo al momento que se realizó el conteo, este es un evento no concluido, por lo que ellos pudieran seguir ejecutando penales posteriormente,

[1] Frecuencia relativa: es el cociente de la frecuencia absoluta de un determinado valor entre el total de valores de la población o muestra.

con lo cual, la probabilidad obtenida pudiera también cambiar; sin embargo, entre más veces se haga el experimento, más precisa será la probabilidad.

Pudiéramos deducir que, si el experimento se repite infinitas de veces, el valor obtenido de la probabilidad frecuencial tenderá al valor teórico de dicha probabilidad.

3

Identifica la equiprobabilidad como una hipótesis que, en caso de que se pueda asumir, facilita el estudio de la probabilidad y observa que cuando se incrementa el número de repeticiones de una simulación, la frecuencia del evento estudiado tiende a su probabilidad teórica.

METAS	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
M1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	**C1** Procedural.	**S1** Elementos aritmético-algebraicos. **S4** Manejo de datos e incertidumbre.
M1 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	**C3** Solución de problemas y modelación.	**S1** Uso de modelos.
M1 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	**C4** Interacción y lenguaje matemático.	**S1** Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico. **S2** Negociación de significados. **S3** Ambiente matemático de comunicación.

Proyecto transversal.

¿Sabías que algunos estudios ponen a Cuauhtémoc Blanco como el mejor cobrador de penales de la historia como jugador profesional?

Cuauhtémoc Blanco tirando un penalti

a) Todo el grupo realizará una investigación documental, recolectarán datos sobre los penales ejecutados por Cuauhtémoc Blanco, cuantos fueron gol y cuantos no lo fueron en total de su carrera.

b) ¿Por qué para calcular la efectividad en los tiros de penal para Lionel Messi o Cristiano Ronaldo debemos utilizar la probabilidad frecuencial y para calcular la efectividad en los tiros de penal para Cuauhtémoc Blanco debemos utilizar la probabilidad teórica?
c) Comenta tus conjeturas con tus compañeros

3. Probabilidad teórica y subjetiva.

Probabilidad clásica.

La probabilidad clásica, también llamada probabilidad teórica, cuantifica el grado de ocurrencia de un evento de manera deductiva (a priori, es decir, antes de que el experimento se realice). Relaciona el número de casos favorables con el número de casos posibles. Si se realiza un experimento aleatorio en el que hay n elementos igualmente probables, y si A es un evento asociado a dicho experimento, entonces la probabilidad de que ocurra el evento A esta dada por:

$$P(A) = \frac{\textit{Número de casos favorables al evento A}}{\textit{Número de casos posibles}}$$

Al igual que en la probabilidad frecuencial, en la probabilidad teórica, la ocurrencia de un evento A no puede ser cualquier número, sino debe de ser un número real P mayor o igual que cero, pero menor o igual que uno, $0 \leq P(A) \leq 1$. El cero indica la imposibilidad de ocurrencia del evento A y el uno indica la certidumbre de que ocurra.

Si un experimento consiste en lanzar un dado, que el evento A sea obtener en la cara superior el número 2 y el evento B sacar en la cara superior un número impar, la probabilidad de que el evento A ocurra es $\frac{1}{6}$, ya que existe solo un caso favorable al evento entre 6 posibles, mientras que la probabilidad de ocurrencia del evento B es $\frac{3}{6}$, (que se simplifica a $\frac{1}{2}$), ya que existe 3 casos favorables entre 6 posibles.

Experimento: Lanzar un dado

Espacio muestral: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Evento A: Salga en la cara superior el número 2: $A = \{2\}$

$$P(A) = \frac{\textit{Número de casos favorables al evento A}}{\textit{Número de casos posibles}}$$

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

Que de acuerdo con el contexto sería $P(2)=\frac{1}{6}$.

Evento B: Salga en la cara superior un número impar: $B=\{1,3,5\}$

$$P(B)=\frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ B}{Número\ de\ casos\ posibles}$$

$$P(B)=\frac{3}{6}$$

$$P(B)=\frac{1}{2}$$

$$P(impar)=\frac{1}{2}$$.

Ejemplo:

Se tiene en un armario 30 camisas, 5 son rojas, 7 amarillas, 8 moradas, 4 naranjas y el resto son verdes. Calcula la probabilidad de que, si extraemos al azar una camisa del armario, ésta sea de un color primario.

Para resolver cualquier problema, es necesario primero definir el experimento, encontrar el espacio muestral y entender el evento solicitado.

Experimento: Extraer una camisa de un armario y observar su color.

Espacio muestral: conjunto de todos los posibles resultados de un experimento, Si cada camisa es representada por la inicial de su color.

$$S=\{r,r,r,r,r,a,a,a,a,a,a,a,m,m,m,m,m,m,m,m,n,n,n,n,v,v,v,v,v,v\}$$

Evento A: Extraer una camisa de color primario. Los colores primarios son el rojo, el amarillo y el azul. En el espacio muestral hay 5 camisas color rojo, 7 color amarillo y ninguna camisa color azul.

$$A=\{r,r,r,r,r,a,a,a,a,a,a,a\}$$

$$P(A)=\frac{\textit{Número de casos favorables al evento A}}{\textit{Número de casos posibles}}$$

$$P(A)=\frac{12}{30}$$

$$P(A)=\frac{2}{5}$$

$$P(color\ primario)=\frac{2}{5}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que al extraer una camisa del armario se obtenga una de color primario es de $\frac{2}{5}$.

SESIÓN II

Propósito de la Sesión.

Abordar los contenidos de las progresiones 4 y 5 de la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) de Pensamiento Matemático I, de forma que se conozca la metodología e intención implementada por el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS) en la Nueva Escuela Mexicana (NEM).

Progresiones de aprendizaje.

4. Elige una técnica de conteo (combinaciones, ordenaciones con repetición, ordenaciones sin repetición, etc.) para calcular el número total de casos posibles y casos favorables para eventos simples con la finalidad de hallar su probabilidad y con ello generar una mayor conciencia en la toma de decisiones.

5. Observa cómo la probabilidad de un evento puede actualizarse cuando se obtiene más información al respecto y considera eventos excluyentes e independientes para emplearlos en la determinación de probabilidades condicionales.

Meta(s) de aprendizaje:

- Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del Pensamiento Matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.
- Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.
- Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del Pensamiento Matemático, de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno.
- Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.

Categorías o Concepto Central.

C1 Procedural

C3 Solución de problemas y modelación.

C2 Procesos de intuición y razonamiento.

Introducción.

El módulo 2 está dedicado al estudio de las técnicas de conteo y la probabilidad conjunta. Por un lado, analizaremos las técnicas de conteo más usuales, como diagrama de árbol, principio multiplicativo, permutaciones, combinaciones, entre otras, para calcular el número total de casos posibles de algún experimento y con ello calcular su probabilidad.

Por otra parte, analizaremos la probabilidad de ocurrencia de dos eventos y analizaremos su comportamiento cuando sucede un evento u otro; cuando ocurre uno y el otro y cuando acontece uno dado otro evento. También analizaremos lo que pasa con las probabilidades cuando contamos con información adicional.

Todo esto con miras a observar y obtener información de una situación con la finalidad de obtener estrategias que ayuden a explicarla, desarrollando la percepción e intuición, apoyados en la resolución de problemas para dar significado de acuerdo al contexto.

MODULO II. TÉCNICAS DE CONTEO, PROBABILIDAD CONJUNTA Y PROBABILIDAD CONDICIONAL

Proyecto transversal.

¿Has oído hablar de la paradoja de Monty Hall?

El problema o paradoja de Monty Hall (llamado así en honor al presentador del programa) es un problema matemático basado en el concurso televisivo *Let´s Make a Deal (hagamos un trato)*. En este programa, el premio mayor consiste en un auto nuevo que se encuentra detrás de alguna de las tres puertas existentes en el estudio de televisión; en las otras dos puertas hay cabras. El conductor del programa le solicita al finalista que elija una de las tres puertas, la que considere se encuentra el auto. Una vez elegida, el conductor, que sabe lo que hay detrás de ellas, abre una de las puertas restantes que tiene una cabra y le propone al participante si quiere cambiar de puerta.

Monty Hall en el programa Let´s Make a Deal

¿Qué harías tú, cambiarías de puerta o te quedarías con tu elección original?
Justifica tu respuesta

4

Elige una técnica de conteo (combinaciones, ordenaciones con repetición, ordenaciones sin repetición, etc.) para calcular el número total de casos posibles y casos favorables para eventos simples con la finalidad de hallar su probabilidad y con ello generar una mayor conciencia en la toma de decisiones.
Las técnicas de conteo se introducen para entender la probabilidad de eventos aleatorios en los que la expresión explícita de su espacio muestral es poco factible.

METAS	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
M2 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del Pensamiento Matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto. **M3** Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	**C1** Procedural	**S1** Elementos aritmético-algebraicos. **S4** Manejo de datos e incertidumbre.
M3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del Pensamiento Matemático, de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno.	**C3** Solución de problemas y modelación.	**S1** Uso de modelos.

Como hemos visto, para poder calcular probabilidades de manera objetiva, es necesario definir el experimento a realizar, conocer el tamaño del espacio muestral y tener claro los eventos a validar. Teniendo nitidez con estos elementos, la obtención de las probabilidades resulta relativamente sencilla, ya que simplemente enunciamos todos los elementos del espacio muestral y de ellos elegimos aquellos que sean favorables al evento en cuestión. Sin embargo, delimitar el tamaño del espacio muestral en ocasiones resulta complicado, por lo que es necesario utilizar diversas herramientas que nos apoyen a realizar los conteos de manera efectiva. Para ello recurrimos a las técnicas de conteo.

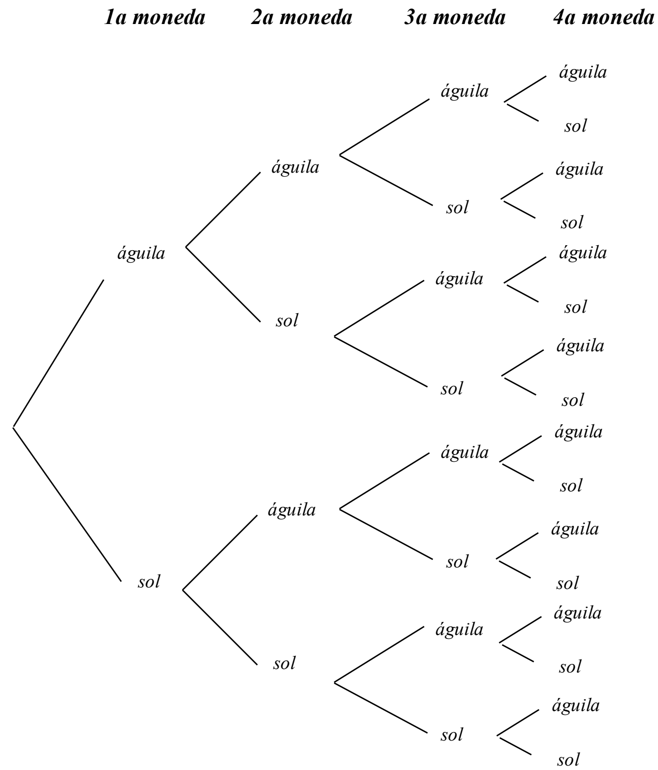
Toma en consideración que:
Las técnicas de conteo son un conjunto de procedimientos formales para realizar conteos de forma eficaz y abreviada, de manera que sea posible determinar el número total de resultados.

Las más comunes son el diagrama de árbol, el principio multiplicativo, el principio aditivo, el factorial de un número, las permutaciones y las combinaciones, las cuales estudiaremos a continuación.

Diagrama de árbol.

Toma en consideración que:
El diagrama de árbol, también conocido como árbol de probabilidad, es una representación gráfica que muestra los posibles resultados de un conjunto de experimentos y sus respectivas probabilidades.

Si quisiéramos realizar el experimento para el lanzamiento de cuatro monedas y calcular la probabilidad de obtener al menos 3 soles, precederíamos nuevamente a realizar nuestro diagrama de árbol para calcular el espacio muestral. Continuamos el procedimiento anterior para el tercer y cuarto lanzamientos, quedando el diagrama de árbol de la siguiente manera:



Así, el experimento consiste en lanzar cuatro monedas; el evento G es obtener al menos 3 soles; el espacio muestral (que está conformado por las 16 ramificaciones formadas) sería:

$$S = \{(a,a,a,a),(a,a,a,s),(a,a,s,a),(a,a,s,s),(a,s,a,a),(a,s,a,s),(a,s,s,a),(a,s,s,s)$$
$$(s,a,a,a),(s,a,a,s),(s,a,s,a),(s,a,s,s),(s,s,a,a),(s,s,a,s),(s,s,s,a),(s,s,s,s)\}$$

Y la probabilidad de que ocurra dicho evento es:

$$P(G) = \frac{\text{Número de casos favorables al evento } G}{\text{Número de casos posibles}}$$

$$P(G) = \frac{5}{16}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que al lanzar cuatro monedas se obtenga al menos tres soles es de $\frac{5}{16}$.

Principio multiplicativo.

Toma en consideración que:
Si deseamos realizar una actividad que consta de r pasos, en donde el primer paso puede hacerse de n_1 maneras o formas, el segundo paso puede hacerse de n_2 maneras o formas y el r-ésimo paso puede hacerse de n_r maneras o formas, entonces el principio multiplicativo nos dice que esta actividad puede ser llevada a cabo de:

$$(n_1)(n_2)...(n_r) \text{ maneras o formas}$$

Ejemplo:

1. Héctor desea asistir a una fiesta, para lo cual cuenta con dos camisas (verde y roja), con tres pantalones (azul, café y morado) y tres pares de zapatos (negro, blanco y gris)

a) ¿De cuántas maneras distintas puede vestirse?

b) Si eligiera al azar su vestimenta, ¿Cuál es la probabilidad de que se vista con camisa roja, pantalón azul y zapatos negros?

a) De acuerdo con el principio multiplicativo tenemos que la actividad (formas de vestirse) consta de tres pasos. El primer paso (camisas) puede hacerse de 2 maneras, el segundo paso (pantalones) de 3 maneras y el tercer paso (zapatos) de 3 maneras. Así:

$$(2)(3)(3) = 18$$

Por lo tanto, Héctor puede vestirse de 18 maneras distintas.

b) El experimento consiste en vestirse de una determinada forma para asistir a una fiesta, el evento A es que Héctor se vista con camisa roja, pantalón azul y zapatos negros. Como sabemos, calcular la probabilidad de un evento resulta de dividir el número de casos favorables a dicho evento entre el número de casos posibles. Sabemos que el total de casos posibles (formas distintas de vestirse) es igual a 18. Por otra parte, una forma en la que Héctor puede vestirse es con camisa verde, pantalón azul y zapatos negros; otra forma sería camisa verde, pantalón azul y zapatos blancos; y así para las 18 distintas formas. Entre ellas, existe sólo una forma en la que Héctor pueda vestirse con camisa roja, pantalón azul y zapatos negros. Como el experimento menciona que la vestimenta se elige al azar, entonces todos los resultados son equiprobables, por tanto:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables al evento } A}{\text{Número de casos posibles}}$$

$$P(A) = \frac{1}{18}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que, si Héctor eligiera al azar su vestimenta, se vistiera con camisa roja, pantalón azul y zapatos negros es de $\frac{1}{18}$, que representa el 5.56%

2. Una compañía telefónica desea incursionar en una determinada población.

a) ¿Cuántos números telefónicos puede generar, si estos deben formarse por 7 dígitos tomados del 0 al 9 y sí es posible repetir dígitos?

b) ¿Cuántos números telefónicos puede generar, si estos deben formarse por 7 dígitos tomados del 0 al 9 y no es posible repetir dígitos?

c) ¿Cuántos números telefónicos puede generar, si estos deben formarse por 7 dígitos tomados del 0 al 9, si sí es posible repetir dígitos y los tres primeros dígitos deben ser forzosamente 291?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que, si te asignan al azar un número telefónico de 7 dígitos, sus tres primeros dígitos sean los números 291?

a) De acuerdo con el principio multiplicativo tenemos que la actividad (formar números telefónicos de 7 dígitos) consta de siete pasos. El primer paso (primer dígito) puede hacerse de 10 maneras (puede ser un número ente 0 y 9); el segundo paso (segundo dígito) puede hacerse también de 10 maneras, ya que si es posible repetir dígito; el tercer paso (tercer dígito) también de 10 maneras; el cuarto, quinto, sexto y séptimo paso también de 10 maneras cada uno. De tal manera:

$$(10)(10)(10)(10)(10)(10)(10) = (10)^7 = 10,000,000$$

Por lo tanto, son 10,000,000 números telefónicos de 7 dígitos que se pueden diseñar, tomando en cuenta que se pueden repetir dígitos.

b) De acuerdo con el principio multiplicativo tenemos que la actividad (formar números telefónicos de 7 dígitos) consta de siete pasos. El primer paso (primer dígito) puede hacerse de 10 maneras; el segundo paso (segundo dígito) puede hacerse de 9 maneras, ya que al no ser posible repetir dígito, un número de los diez ya está utilizado; el tercer paso (tercer dígito) puede hacerse de 8 maneras, ya que ya están elegidos dos números de los diez posibles; el cuarto paso (cuarto dígito), dado el mismo razonamiento, de 7 maneras; el quinto paso (quinto dígito) de 6 maneras; el sexto paso (sexto dígito) de 5 maneras; y el séptimo paso (séptimo dígito) de 4 maneras. De tal manera:

$$(10)(9)(8)(7)(6)(5)(4) = 604,800$$

Por lo tanto, son 604,800 números telefónicos de 7 dígitos que se pueden diseñar, tomando en cuenta que no se puede repetir ningún dígito.

c) De acuerdo con el principio multiplicativo tenemos que la actividad (formar números telefónicos de 7 dígitos) consta de siete pasos. El primer paso (primer dígito) puede hacerse de una manera, ya que necesariamente el número telefónico debe empezar con un 2; el segundo paso (segundo dígito) puede hacerse de una manera, ya que forzosamente este dígito debe ser 9, el tercer paso (tercer dígito) puede hacerse también de una sola manera, ya que ahí debe de ir el número 1; el cuarto paso (cuarto dígito) puede hacerse de 10 maneras distintas, ya que a partir de aquí no hay más restricciones; el quinto paso (quinto dígito), dado que si es posible repetir números, puede hacerse de 10 maneras; el sexto paso (sexto dígito) de 10 maneras y el séptimo paso (séptimo dígito) de 10 maneras.. De tal manera:

$$(1)(1)(1)(10)(10)(10)(10) = 10,000$$

Por lo tanto, son 10,000 números telefónicos de 7 dígitos que se pueden diseñar, tomando en cuenta que si es posible repetir dígitos y los tres primeros dígitos deben ser forzosamente 291.

d) El experimento consiste en generar números telefónicos de 7 dígitos, el evento H consiste en que se te asigne un número telefónico cuyos tres primeros dígitos sean 291. Como sabemos, calcular la probabilidad de un evento resulta de dividir el número de casos favorables a dicho evento entre el número de casos posibles. Sabemos que el total de casos posibles (números telefónicos de 7 dígitos) es igual a 10,000,000, ya que no hay restricción alguna para formarlos. Por otra parte, un número telefónico que te pueden asignar que cumpla con las condiciones del problema es 291 00 00, otro pudiera ser 291 00 01. Es decir, existen $(1)(1)(1)(10)(10)(10)(10)=10,000$ números distintos que te pueden asignar. Así:

$$P(H)=\frac{\textit{Número de casos favorables al evento H}}{\textit{Número de casos posibles}}$$

$$P(H)=\frac{10,000}{10,000,000}$$

$$P(H)=\frac{1}{1,000}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que, si te asignan al azar un número telefónico de 7 dígitos, sus tres primeros dígitos sean los números 291 es de $\frac{1}{1,000}$, que representa el 0.1%

Principio aditivo.

Toma en consideración que:
Si deseamos realizar una actividad, la cual tiene formas alternativas para ser realizada, donde la primera de estas alternativas se puede realizar de M maneras o formas, la segunda alternativa puede realizarse de N maneras o formas, y la última alternativa puede ser realizada de W maneras o formas, entonces el principio aditivo nos dice que esta actividad puede ser llevada a cabo de:

$$M+N+...+W \textit{ maneras o formas}$$

Por ejemplo, Oscar va a presentar examen para ingresar a la Universidad. Si tiene que responder 30 preguntas de comprensión lectora, 30 de redacción indirecta, 30 de pensamiento matemático y 30 de inglés ¿Cuántas preguntas tendrá que responder? El principio aditivo nos menciona que la cantidad de preguntas a responder son 30+30+30+30=120.

Teniendo el espacio muestral, podemos calcular la probabilidad de un evento en particular. Por ejemplo, ¿cuál será la probabilidad de que, si elegimos una pregunta al azar, esta sea de pensamiento matemático? Pues dividimos los casos favorables al evento entre el total de casos:

$$P(PM) = \frac{\textit{Número de casos favorables al evento PM}}{\textit{Número de casos posibles}}$$

$$P(PM) = \frac{30}{120}$$

$$P(PM) = \frac{1}{4}$$

Por lo que, si elegimos al azar una pregunta, la probabilidad de que ésta sea de pensamiento matemático es de $\frac{1}{4}$, es decir del 25%.

Factorial.

Una herramienta importante que nos auxilia al realzar conteos es el factorial.

Toma en consideración que: El factorial de un número entero positivo se define como el producto de multiplicar los números enteros desde el 1 hasta *n*. Su notación es: $n! = (n)(n-1)(n-2)...(2)(1)$

Así, por ejemplo, el factorial de 6 (expresado como seis factorial) es:

$$6! = (6)(5)(4)(3)(2)(1)$$
$$6! = 720$$

Ahora, si queremos calcular $\frac{8!}{5!}$ (se lee ocho factorial entre cinco factorial) se procede de la siguiente forma. Por definición:

$$\frac{8!}{5!} = \frac{(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{(5)(4)(3)(2)(1)}$$

Sin embargo, sabemos que un número dividido por sí mismo da como resultado la unidad (1), y como, para este ejemplo $(5)(4)(3)(2)(1) = 5!$:

$$\begin{aligned}\frac{8!}{5!} &= \frac{(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{(5)(4)(3)(2)(1)} \\ &= \frac{(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{(5)(4)(3)(2)(1)} \\ &= \frac{(8)(7)(6)(5!)}{5!} \\ &= (8)(7)(6)\frac{5!}{5!} \\ &= (8)(7)(6)(1) \\ &= (8)(7)(6) \\ &= 336\end{aligned}$$

Es por ello por lo que, generalmente, cuando se resuelve una división de esta naturaleza, suele expresarse así:

$$\begin{aligned}\frac{8!}{5!} &= \frac{(8)(7)(6)(5!)}{5!} \\ &= (8)(7)(6) \\ &= 336\end{aligned}$$

Para el caso de cero factorial ($0!$), se toma por convención el valor de uno, por lo que $0! = 1$

Actividad.

Copia el cuadro comparativo y conforme vayas analizando las nociones presentadas, complétalo.

Noción	Condiciones			Fórmula
	¿Importa el orden?	¿Los elementos se pueden repetir?	¿Otras condiciones?	
Permutación.				
Permutación con elementos indistinguibles.				
Permutación con repetición.				
Combinación.				

Combinación con repetición.				

Permutaciones.

Toma en consideración que:
Una permutación (también llamada ordenación o variación) de objetos es un arreglo de éstos, en el que el orden sí importa. Para encontrar el número de permutaciones de *n* objetos diferentes en grupos de *r*, donde no se permite el reemplazo o la repetición, ocupamos la siguiente fórmula:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo:

1. ¿Cuántos números telefónicos puede generar, si estos deben formarse por 7 dígitos tomados del 0 al 9 y no es posible repetir dígitos?

Verifiquemos los supuestos de orden y repetición, para aplicar la noción correcta.
Sí nos importa el orden, ya que un número telefónico puede ser 1234567 y otro número sería 7654321, es decir, se ocupan los mismos dígitos, pero al estar en otro orden, generan un número telefónico distinto.
El experimento se realiza sin repetición, ya que es un supuesto solicitado.
De esta forma como el orden sí importa y el experimento se realiza sin repetición, ocupamos la noción de permutación. Así tenemos diez elementos en total (*n=10*), de los cuales ocuparemos cinco (*r*=7). Por tanto:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P_7^{10} = \frac{10!}{(10-7)!}$$

$$P_7^{10} = \frac{10!}{3!}$$

$$P_7^{10} = \frac{(10)(9)(8)(7)(6)(5)(4)(3!)}{3!}$$

$$P_7^{10} = (10)(9)(8)(7)(6)(5)(4)$$

$$P_7^{10} = 604,800$$

Por lo tanto, son 604,800 números telefónicos de 7 dígitos que se pueden diseñar, tomando en cuenta que no se puede repetir ningún dígito.

Como te habrás dado cuenta, el ejemplo anterior lo hemos resuelto empleando el principio multiplicativo y la noción de permutación. Cualquiera de las dos formas es correcta, lo importante es saber plantear el problema por cualquier método.

Permutaciones con elementos indistinguibles.

Toma en consideración que:
En caso de que se quieran formar arreglos con todos los elementos de un conjunto, entre los cuales existen algunos que son iguales o indistinguibles, utilizamos la fórmula:

$$P^{n}_{a,b,\ldots,m} = \frac{n!}{a!b!\ldots m!}$$

Ejemplo:
1. ¿De cuántas maneras distintas se puede ordenar la palabra ABRACADABRA?
La palabra ABRACADABRA consta de 11 letras, de las cuales la letra A se repite 5 veces, la letra B se repite 2 veces, la R 2 veces, la C 1 vez y la D 1 vez, por lo que *n=11, a=5, b=2, c=2, d=1 y e=1*. Así:

$$P^{n}_{a,b,c,d,e} = \frac{n!}{a!b!c!d!e!}$$

$$P^{11}_{5,2,2,1,1} = \frac{11!}{5!2!2!1!1!}$$

$$P^{11}_{5,2,2,1,1} = \frac{(11)(10)(9)(8)(7)(6)(5!)}{5!2!2!1!1!}$$

$$P^{11}_{5,2,2,1,1} = \frac{(11)(10)(9)(8)(7)(6)}{2!2!1!1!}\left(\frac{5!}{5!}\right)$$

$$P^{11}_{5,2,2,1,1} = \frac{(11)(10)(9)(8)(7)(6)}{(2)(1)(2)(1)(1)(1)}$$

$$P^{11}_{5,2,2,1,1} = \frac{332,640}{4}$$

$$P^{11}_{5,2,2,1,1} = 83,160$$

Por lo tanto, la palabra ABRACADABRA puede ordenarse de 83,160 maneras distintas.

Permutaciones con repetición.

Toma en consideración que:
Si lo que queremos es ordenar *r* elementos de un total de *n* objetos diferentes, donde el orden si es importante, pero que cualquier elemento, después de ser elegido, pueda ser susceptible de ser elegido nuevamente, nos estamos refiriendo a las *permutaciones con repetición*. Su fórmula es:

$$PR^{n}_{r} = n^{r}$$

Por ejemplo, si tenemos un candado de combinación, cuya clave para abrirse está formada por un número de cuatro cifras y cada dígito de esta combinación puede estar formado por un número del 0 al 9, ¿de cuántos números distintos es posible formar la clave para abrir el candado?

Candado de combinación con clave de cuatro cifras

En este ejemplo:

- el orden de los dígitos si importa (ya que no es lo mismo el número 1234 que el número 4321);
- también se puede apreciar que el primer dígito se puede elegir de entre 10 números (0 al 9), el segundo dígito también se puede elegir de entre 10 números, el tercer y cuarto dígito también. Esto equivale a decir que tenemos en una urna 10 bolas numeradas del 0 al 9, elegimos la primera, la observamos y la volvemos a depositar, antes de extraer la segunda. A este proceso se le denomina *con repetición* o *con remplazo*.

Decimos que en el experimento realizado importa el orden y es con reemplazo. Con estas condiciones validadas se puede aplicar la fórmula de permutaciones con repetición, donde y con *n=10* (dígito formado por uno de estos diez valores: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, o 9) y *r=4* (número de cuatro cifras):

$$PR_r^n = n^r$$

$$PR_4^{10} = 10^4$$

$$PR_4^{10} = 10,000$$

Por lo tanto, existen 10,000 posibles combinaciones para abrir un candado cuya clave esté formada por un número de cuatro cifras y cada dígito de esta combinación esté formado por un número del 0 al 9.

Ahora, si tuviéramos un candado de combinación cuya clave para abrirse esté formada por un número de 10 cifras, pero cada dígito sólo puede estar formado por uno de los siguientes valores: 0, 3, 6, 9, ¿de cuántos números distintos es posible formar la clave para abrir el candado?

Combinaciones.

Toma en consideración que:
Una combinación de objetos es un arreglo de éstos, en el que el orden no importa. Para encontrar el número de combinaciones de n objetos diferentes en grupos de r, donde no

se permite el reemplazo o la repetición, ocupamos la siguiente fórmula:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Ejemplo:
¿Cuántas filas puedo hacer con 5 personas, si hay 12 personas disponibles?
¿Interesa el orden? No. Ya que no importa quien esté formado primero, lo que nos interesa es que esté formado en la fila.
¿En el experimento se permite el reemplazo o la repetición? No, ya que una vez que una persona se formó, no puede volverse a formar.
Como no interesa el orden y el experimento es sin reemplazo, ocupamos la noción de combinación. Si *n=12* y *r=5*:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C_5^{12} = \frac{12!}{5!(12-5)!}$$

$$C_5^{12} = \frac{12!}{5!7!}$$

$$C_5^{12} = \frac{(12)(11)(10)(9)(8)(7!)}{5!7!}$$

$$C_5^{12} = \frac{(12)(11)(10)(9)(8)}{5!}\left(\frac{7!}{7!}\right)$$

$$C_5^{12} = \frac{(12)(11)(10)(9)(8)}{(5)(4)(3)(2)(1)}$$

$$C_5^{12} = \frac{95040}{120}$$

$$C_5^{12} = 792$$

Por lo tanto, se pueden hacer 792 filas de 5 personas seleccionadas de un grupo de 12.

Combinaciones con repetición.

Toma en consideración que:
Si lo que queremos es ordenar *r* elementos de un total de *n* objetos diferentes, donde el orden no es importante, pero que cualquier elemento, después de ser elegido, pueda ser susceptible de ser elegido nuevamente, nos estamos refiriendo a las *combinaciones con repetición*. La forma de obtener dichas combinaciones con repetición es:

$$CR_r^n = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

Por ejemplo, en una juguería se preparan jugos a partir de siete frutas diferentes (naranja, kiwi, toronja, manzana, piña, mandarina y uva). Cada bebida puede estar compuesta por cuatro frutas. ¿Cuántas bebidas puede preparar, si se le permite repetir componentes?

Jugo de frutas

De acuerdo con las condiciones del problema:

- El orden no es necesario, ya que un jugo compuesto por naranja, kiwi, toronja y manzana sabrá igual que un jugo compuesto por manzana, toronja, kiwi y naranja.
- También se menciona que sí es posible la repetición de ingredientes, es decir, si solicitan un jugo que contenga naranja, kiwi, toronja y manzana, decimos que una parte del jugo está formada por naranja, otra por kiwi, otra por toronja y otra por manzana; pero si, por ejemplo, un cliente pide un jugo de piña, las porciones que ocuparían las otras frutas estarían ocupadas por esta fruta. Técnicamente, se sirve una porción de piña, posteriormente se sirve otra, después otra y por último otra porción de piña. Por esto decimos que el experimento se realiza con repetición.

Como el orden no es necesario y sí se permite el reemplazo o la repetición, ocuparemos la noción de combinaciones con repetición con *n*=7 y *r*=4:

$$CR_r^n = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

$$CR_4^7 = \frac{(7+4-1)!}{4!(7-1)!}$$

$$CR_4^7 = \frac{10!}{4!6!}$$

$$CR_4^7 = \frac{(10)(9)(8)(7)6!}{(4)(3)(2)(1)6!}$$

$$CR_4^7 = \frac{(10)(9)(8)(7)}{(4)(3)(2)(1)}$$

$$CR_4^7 = \frac{5040}{24}$$

$$CR_4^7 = 210$$

Por lo tanto, se puede realizar 210 jugos preparados con cuatro frutas de las siete disponibles, pudiendo repetir frutas.

5

Observa cómo la probabilidad de un evento puede actualizarse cuando se obtiene más información al respecto y considera eventos excluyentes e independientes para emplearlos en la determinación de probabilidades condicionales.
La introducción de la actualización de probabilidades se hace a través de simulaciones y sólo después se aborda el teorema de Bayes.

METAS	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
M4 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto	**C2** Procesos de intuición y razonamiento.	**S1** Capacidad para observar y conjeturar. **S2** Pensamiento intuitivo. **S3** Pensamiento formal.

5. Probabilidad conjunta (eventos excluyentes e independientes) y probabilidad condicional

Si lanzamos un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga en su cara superior un 2 o un 5?, ¿cuál es la probabilidad de que salga en su cara superior un número menor o igual que 4 o un número par?
Hasta el momento hemos asignado probabilidades a eventos simples, es decir, se aplicaron a un sólo evento a la vez. Pero en ocasiones, es necesario calcular la probabilidad de que ocurra un evento u otro, o de que ocurran dos eventos simultáneamente, es decir, calcular la probabilidad para eventos compuestos. Este forma donde se involucran dos o más eventos se le conoce como probabilidad conjunta.

Para poder estudiar la probabilidad conjunta, es necesario estudiar primero los tipos de eventos involucrados. El siguiente cuadro los resume:

Descripción de los eventos	Son conocidos como:
Son los eventos que no pueden ocurrir simultáneamente, es decir, la ocurrencia de un evento impide automáticamente la ocurrencia del otro.	Eventos mutuamente excluyentes.
Son los eventos que es posible ocurran a la vez, es decir, la ocurrencia de uno no impide la ocurrencia de otro.	Eventos no excluyentes.
Son los eventos donde el resultado del segundo evento no es afectado por el resultado del primer evento, es decir, la ocurrencia de un evento no cambia dado que ha ocurrido otro evento.	Eventos independientes
Son los eventos donde el resultado del segundo evento sí es afectado por el resultado del primer evento, es decir, la ocurrencia de un evento cambia dado que ha ocurrido otro evento.	Eventos dependientes

Veamos ejemplos para cada uno de estos eventos conjuntos.

De eventos mutuamente excluyentes: Si el experimento consiste en lanzar un dado, un evento A podría ser que salga en la cara superior el número 2 y un evento B podría ser que salga en la cara superior el número 5. Cada uno de estos eventos puede ocurrir de manera individual, sin embargo, al realizar el experimento, no pueden ocurrir los dos eventos al mismo tiempo (no puede ocurrir que, al lanzar el dado, la cara superior sea 2 y al mismo tiempo sea 5). De esta forma podemos decir que en el experimento de lanzar un dado y registrar su cara superior, el evento A (que salga el número 2) y el evento B (que salga el número 5) son eventos mutuamente excluyentes.

De eventos no excluyentes: Si el experimento consiste en lanzar un dado, un evento C podría ser que salga en la cara superior un número menor o igual que 4 y un evento D podría ser que salga en la cara superior un número par. Cada uno de estos eventos puede ocurrir de manera individual y también, al realizar el experimento, sí puede ocurrir que los dos eventos sucedan al mismo tiempo (puede ocurrir que, al lanzar el dado, en la cara superior se tenga un número menor o igual que 4 y al mismo tiempo ese número sea un número par; el número 2 sería un ejemplo de esto). De esta forma podemos decir que en el experimento de lanzar un dado y registrar su cara superior, el evento C (que salga un número menor o igual que 4) y el evento D (que salga un número par) son eventos no excluyentes.

De eventos independientes: Si tenemos en un librero 5 libros de acción, 2 libros de suspenso, 3 de ficción y 4 de comedia y el experimento consiste en tomar un libro, observar su género, volverlo a colocar en el librero, tomar otro libro y observar ahora el género de éste; un evento E podría ser tomar un libro de suspenso la primera vez y un evento F podría ser tomar un libro de acción la segunda vez. Como el experimento consiste en regresar el primer libro al librero, entonces la extracción del segundo libro será con el librero en su estado original; de esta forma, el resultado de este segundo intento no dependerá del resultado del primero. Podemos decir que, en el experimento de tomar un libro, volver a colocarlo y después tomar otro, el evento E (obtener un libro de suspenso en la primera extracción) y el evento F (obtener un libro de acción en la segunda extracción) son eventos independientes.

De eventos dependientes: Si tenemos en un librero 5 libros de acción, 2 libros de suspenso y 3 de ficción y el experimento consiste en tomar un libro, observar su género, tomar otro libro y observar ahora el género de éste; un evento G podría ser tomar un libro de ficción la primera vez y un evento H podría ser tomar un libro de comedia la segunda vez. Como el experimento consiste en tomar un libro del librero y posteriormente tomar un segundo libro, entonces la extracción del segundo libro no será con el librero en su estado original, ya que el librero tendrá un libro menos (la primera vez se tomó el libro y no se regresó); de esta forma, el resultado de este segundo intento sí dependerá del resultado del primero. Podemos decir que, en el experimento de tomar un libro y después tomar otro, el evento G (obtener un libro de ficción en la primera extracción) y el evento H (obtener un libro de comedia en la segunda extracción) son eventos dependientes.

Probabilidad para eventos mutuamente excluyentes.

Toma en consideración que:
La ley aditiva, también conocida también como regla de la adición, establece que cuando los eventos son mutuamente excluyentes, la probabilidad de ocurrencia de un evento u otro es igual a la suma de las probabilidades individuales:

$$P(A\ o\ B) = P(A) + P(B)$$

cuando A y B no tienen elementos comunes.

Ejemplo:
Si lanzamos un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga en su cara superior un 2 o un 5?

Definamos el experimento, el espacio muestral y los eventos.

Experimento: lanzar un dado.

Espacio muestral: $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

Evento A: salga en la cara superior un 2: $A=\{2\}$

Evento B: salga en la cara superior un 5: $B=\{5\}$

Ahora definamos la probabilidad de los eventos individuales:

$$P(A)=\frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ A}{Número\ de\ casos\ posibles}$$

$$P(A)=\frac{1}{6}$$

$$P(B)=\frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ B}{Número\ de\ casos\ posibles}$$

$$P(B)=\frac{1}{6}$$

Como los eventos A y B son mutuamente excluyentes (no hay elementos comunes entre ellos) utilizamos la fórmula correspondiente:

$$P(A\ o\ B)=P(A)+P(B)$$

$$P(A\ o\ B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$$

$$P(A\ o\ B)=\frac{2}{6}$$

$$P(A\ o\ B)=\frac{1}{3}$$

O también podemos decir que $P(2\ o\ 5)=\frac{1}{3}$.

Por lo tanto, la probabilidad de que, al lanzar un dado y registrar el valor de su cara superior, ésta sea un 2 o un 5 es de $\frac{1}{3}$ (33.33%)

Probabilidad para eventos no excluyentes.

Toma en consideración que:
La ley aditiva también establece que cuando los eventos son no excluyentes, la probabilidad de ocurrencia de un evento u otro es igual a la suma de las probabilidades individuales menos la probabilidad de ocurrencia simultánea de los eventos:

$$P(A\ o\ B)=P(A)+P(B)-P(A\ y\ B)$$

cuando A y B tienen elementos comunes.

Ejemplo:
Si lanzamos un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga en su cara superior un número menor o igual que 4 o un número par?

Definamos el experimento, el espacio muestral y los eventos.

Experimento: lanzar un dado.

Espacio muestral: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Evento C: salga en la cara superior un número menor o igual que 4:
$C = \{1, 2, 3, 4\}$

Evento D: salga en la cara superior un número par: $D = \{2, 4, 6\}$

Evento C y D simultáneos: salga en la cara superior un número menor o igual que 4 y que salga en la cara superior un número par: $C\ y\ D = \{2, 4\}$

Definamos la probabilidad de los eventos individuales:

$$P(C) = \frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ C}{Número\ de\ casos\ posibles}$$

$$P(C) = \frac{4}{6}$$

$$P(D) = \frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ D}{Número\ de\ casos\ posibles}$$

$$P(D) = \frac{3}{6}$$

Definamos la probabilidad de los eventos simultáneos:

$$P(C\ y\ D) = \frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ C\ y\ D\ simultáneos}{Número\ de\ casos\ posibles}$$

$$P(C\ y\ D) = \frac{2}{6}$$

Como los eventos C y D son no excluyentes (si hay elementos comunes entre ellos) utilizamos la fórmula correspondiente:

$$P(C\ o\ D) = P(C) + P(D) - P(C\ y\ D)$$

$$P(C\ o\ D) = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6}$$

$$P(C\ o\ D) = \frac{5}{6}$$

O también podemos decir que $P(menor\ o\ igual\ que\ 4\ o\ par) = \frac{5}{6}$.

Por lo tanto, la probabilidad de que, al lanzar un dado y registrar el valor de su cara superior, ésta sea un número menor o igual que 4 o un número par es de $\frac{5}{6}$ (83.33%)

Probabilidad para eventos independientes.

Toma en consideración que:
La ley multiplicativa, también conocida como regla de la multiplicación, establece que cuando los eventos son independientes, la probabilidad de ocurrencia de dos eventos A y B es igual al producto de sus probabilidades individuales:

$$P(A\ y\ B) = P(A)P(B)$$

Ejemplo:
Se tiene un librero con 5 libros de acción, 2 libros de suspenso, 3 de ficción y 4 de comedia. Si elegimos un libro al azar, lo regresamos, y elegimos otro libro al azar, ¿cuál es la probabilidad de que en la primera extracción el libro sea de suspenso y en la segunda extracción sea de acción?

Definamos el experimento, el espacio muestral y los eventos.

Experimento: Extraer un libro, regresarlo al librero y después, extraer otro libro.

Espacio muestral: $S = \{a,a,a,a,a,s,s,f,f,f,c,c,c,c\}$

Evento E: obtener un libro de suspenso en la primera extracción: $E = \{s,s\}$

Evento F: obtener un libro de acción en la segunda extracción: $F = \{a,a,a,a,a\}$

Definamos la probabilidad de los eventos E y F. En la primera extracción, para el evento E que es obtener un libro de suspenso, se tienen 2 casos favorables de 14 casos posibles:

$$P(E) = \frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ E}{Número\ de\ casos\ posibles}$$

$$P(E) = \frac{2}{14}$$

Para la segunda extracción, se tiene como condición regresar el libro al librero, por lo que para el evento F, que es obtener un libro de acción, se tienen 5 casos favorables de 14 casos posibles:

$$P(F) = \frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ F}{Número\ de\ casos\ posibles}$$

$$P(F) = \frac{5}{14}$$

Como la ocurrencia del evento F no depende de la ocurrencia del evento E, utilizamos la fórmula para obtener la probabilidad de eventos independientes:

$$P(E\ y\ F) = P(E)P(F)$$

$$P(E\ y\ F) = \left(\frac{2}{14}\right)\left(\frac{5}{14}\right)$$

$$P(E\ y\ F) = \frac{10}{196}$$

$$P(E\ y\ F) = \frac{5}{98}$$

O también podemos decir que $P(suspenso\ y\ acción) = \frac{5}{98}$

Por lo tanto, si elegimos un libro al azar, lo regresamos, y elegimos otro libro al azar, la probabilidad de que, en la primera extracción el libro sea de suspenso y en la segunda extracción sea de acción es de $\frac{5}{98}$ (5.1%)

Probabilidad para eventos dependientes.

Toma en consideración que:

La ley multiplicativa también establece que cuando los eventos son dependientes, la probabilidad de ocurrencia de dos eventos A y B es igual al producto de la probabilidad de A por la probabilidad de B después de ocurrir A:

$$P(A\ y\ B) = P(A)P(B|A)$$

Ejemplo:
Se tiene un librero con 5 libros de acción, 2 libros de suspenso, 3 de ficción y 4 de comedia. Si elegimos un libro al azar y posteriormente elegimos otro libro al azar, ¿cuál es la probabilidad de que en la primera extracción el libro sea de ficción y en la segunda extracción sea de comedia?

Definamos el experimento, el espacio muestral y los eventos.

Experimento: Extraer un libro y posteriormente extraer otro libro.

Espacio muestral: $S=\{a,a,a,a,a,s,s,f,f,f,c,c,c,c\}$

Evento G: obtener un libro de ficción en la primera extracción: $G=\{f,f,f\}$

Evento H: obtener un libro de comedia en la segunda extracción: $H=\{c,c,c,c\}$

Definamos la probabilidad de los eventos G y H. En la primera extracción, para el evento G, que es obtener un libro de ficción, se tienen 3 casos favorables de 14 casos posibles:

$$P(G)=\frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ G}{Número\ de\ casos\ posibles}$$

$$P(G)=\frac{3}{14}$$

Para la segunda extracción, dado que ya se extrajo un libro de ficción y éste no se volvió a colocar en el librero, entonces para el evento H, que es obtener un libro de comedia, el espacio muestral cambia, ya que no se tendrán los 14 libros originales, sino que se tendrán sólo 13:

$$S=\{a,a,a,a,a,s,s,f,f,c,c,c,c\}$$

Para el evento H, dado que ha ocurrido el evento G, existen 4 casos favorables de 13 casos posibles. Entonces, la probabilidad del evento H dado el evento G es:

$$P(H|G)=\frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ H\ dado\ G}{Número\ de\ casos\ posibles}$$

$$P(H|G)=\frac{4}{13}$$

Como la ocurrencia del evento H depende de la ocurrencia del evento G, utilizamos la fórmula para obtener la probabilidad de eventos dependientes:

$$P(G\ y\ H)=P(G)P(H|G)$$

$$P(G\ y\ H)=\left(\frac{3}{14}\right)\left(\frac{4}{13}\right)$$

$$P(G\ y\ H)=\frac{12}{182}$$

$$P(G\ y\ H)=\frac{6}{91}$$

O también podemos decir que $P(ficción\ y\ comedia)=\frac{6}{91}$

Por lo tanto, si elegimos un libro al azar y posteriormente elegimos otro libro al azar, la probabilidad de que, en la primera extracción el libro sea de ficción y en la segunda extracción sea de comedia es de $\frac{6}{91}$ (6.59%)

Probabilidad condicional.

Toma en consideración que:
La probabilidad de que un evento B ocurra cuando se sabe que ya ocurrió un evento A se llama *probabilidad condicional,* se lee «la probabilidad de B dado A» y se denota por $P(B|A)$:

$$P(B|A)=\frac{P(A\ y\ B)}{P(A)}$$

Ejemplo:

Un estudio de mercado arroja que en la tienda de "Don Fidel", el 72% de las personas que entran, realizan su compra en la sección de "vegetales", el 28% realiza su compra en la sección de "carnes" y el 20% realiza su compra en ambas secciones. Si observamos las compras realizadas del siguiente cliente que ingrese a la tienda de Don Fidel:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que compre en la sección de "carnes" dado que haya comprado en la sección de "vegetales"?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que compre en la sección de "vegetales" dado que haya comprado en la sección de "carnes"?

a) Definiendo el experimento y los eventos:

Experimento: Observar las compras de los clientes en la tienda de "Don Fidel"

Evento V: compró en la sección "vegetales": $V=\{vegetales\}$

Evento C: compró en la sección "carnes": $C=\{carnes\}$

Como es sabido, el espacio muestral, que representa el número total de casos, nos ayuda a calcular la probabilidad de ocurrencia de los evento. Pero como podemos observar, el problema ya nos da dicha probabilidad individual para cada evento, así como su probabilidad conjunta:

$$P(V) = 72\% \qquad P(C) = 28\% \qquad P(V\ y\ C) = 20\%$$

Con ello, podemos calcular la probabilidad condicional de que el siguiente cliente compre en la sección de "carnes" dado que haya comprado en la sección de "vegetales"

$$P(C|V) = \frac{P(C\ y\ V)}{P(V)}$$

$$P(carnes|vegetales) = \frac{P(carnes\ y\ vegetales)}{P(vegetales)}$$

$$P(carnes|vegetales) = \frac{20\%}{70\%}$$

$$P(carnes|vegetales) = 0.2857$$

Es decir, la probabilidad de que el siguiente cliente compre en la sección de "carnes" dado que haya comprado en la sección de "vegetales" es del 28.57%

b) En este caso es el mismo experimento, se ocupan los mismos eventos y las mismas probabilidades:

Experimento: Observar las compras de los clientes en la tienda de "Don Fidel"

Evento V: compró en la sección "vegetales": $V = \{vegetales\}$

Evento C: compró en la sección "carnes": $C = \{carnes\}$

$$P(V) = 72\% \qquad P(C) = 28\% \qquad P(V\ y\ C) = 20\%$$

Con ello, podemos calcular la probabilidad condicional de que el siguiente cliente compre en la sección de "vegetales" dado que haya comprado en la sección de "carnes"

$$P(V|C) = \frac{P(V\ y\ C)}{P(C)}$$

$$P(vegetales|carnes) = \frac{P(vegetales\ y\ carnes)}{P(carnes)}$$

$$P(vegetales|carnes) = \frac{20\%}{28\%}$$

$$P(vegetales|carnes) = 0.7143$$

Es decir, la probabilidad de que el siguiente cliente compre en la sección de "vegetales" dado que haya comprado en la sección de "carnes" es del 71.43%

Teorema de Bayes.

Para poder tomar la mejor decisión, conviene preguntarnos si, con la información adicional proporcionada (el concursante elige una puerta, y después de eso, el presentador abre una de las otras dos puertas restantes, de manera que aparezca una cabra) se aumenta la posibilidad de ganar al cambiar de elección.

A primera vista podrías decir que la probabilidad de quedarte con tu elección original o cambiar de puerta es la misma. Se tiene una puerta con el premio de tres puertas posibles, por lo que la probabilidad es $\frac{1}{3}$ para cada puerta no importando cuál se elija. Sin embargo, al tener información adicional, la probabilidad se modifica. Hagamos una tabla que muestre las distintas configuraciones en las que pudiera estar el auto y las cabras detrás de cada puerta:

	Detrás de puerta 1:	Detrás de puerta 2:	Detrás de puerta 3:
Configuración A	Cabra	Cabra	Auto
Configuración B	Cabra	Auto	Cabra
Configuración C	Auto	Cabra	Cabra

Repliquemos el experimento para ver los posibles resultados del concurso. Supongamos que el concursante elije la puerta 1, entonces, el presentador, una vez que el concursante ya eligió, abre una de las puertas restantes que tiene una cabra. Para la configuración A, el presentador tendría que abrir la puerta 2 (ya que ahí está la cabra), quedando cerradas la puerta 1 (elegida por el concursante) y la puerta 3. Ahora, si el concursante decide quedarse con su elección original (puerta 1) el premio, al final del concurso, será una cabra, pero si decide cambiar de puerta (a la puerta 3), el premio será el auto:

	Detrás de puerta 1:	Detrás de puerta 2:	Detrás de puerta 3:	Premio al no cambiar puerta	Premio al sí cambiar puerta
Configuración A	Cabra	Cabra	Auto	Cabra	Auto
Configuración B	Cabra	Auto	Cabra		
Configuración C	Auto	Cabra	Cabra		

Siguiendo el mismo procedimiento para la configuración B, el concursante elije la puerta 1, y en este caso, el presentador tendría que abrir la puerta 3 (ya que ahí está la cabra en la configuración B), quedando cerradas la puerta 1 (elegida por el concursante) y la puerta 2. Si el concursante decide quedarse con su elección original (puerta 1) el premio al final del concurso será una cabra, y si decide cambiar de puerta (a la puerta 2), el premio será el auto:

	Detrás de puerta 1:	Detrás de puerta 2:	Detrás de puerta 3:	Premio al no cambiar puerta	Premio al sí cambiar puerta
Configuración A	Cabra	Cabra	Auto	Cabra	Auto
Configuración B	Cabra	Auto	Cabra	Cabra	Auto
Configuración C	Auto	Cabra	Cabra		

Si los premios estuvieran colocados como muestra la configuración C y el concursante elije la puerta 1, entonces el presentador puede abrir cualquiera de las puertas 2 o 3 (ya que ahí están las cabras), quedando cerradas la puerta 1 (elegida por el concursante) y la otra puerta no abierta. Si el concursante decide quedarse con su elección original (puerta 1) el premio al finalizar el concurso será el auto, y si decide cambiar de puerta, el premio será la cabra:

	Detrás de puerta 1:	Detrás de puerta 2:	Detrás de puerta 3:	Premio al no cambiar puerta	Premio al sí cambiar puerta
Configuración A	Cabra	Cabra	Auto	Cabra	Auto
Configuración B	Cabra	Auto	Cabra	Cabra	Auto
Configuración C	Auto	Cabra	Cabra	Auto	Cabra

De tal manera, si el concursante decide mantenerse con su elección original, es decir, no cambiar de puerta, tendría un caso favorable de tres posibles de ganar el auto, por lo que la probabilidad de ganarse el premio mayor sería de:

$$P(mantener\ elección\ original) = \frac{1}{3}.$$

En cambio, si el concursante decide cambiar de puerta, dado que, al haber él elegido una, el presentador abre otra donde se tiene una cabra, tendría dos casos favorables de tres posibles de ganar el auto, por lo que la probabilidad de ganarse el premio mayor sería de:

$$P(cambiar\ puerta\ dado\ que\ ya\ salió\ cabra) = \frac{2}{3}.$$

Como te darás cuenta, si se cuenta con información adicional, podemos ajustar la probabilidad de ocurrencia de un evento. En este sentido, la determinación de la probabilidad de las causas a partir de los efectos que se han podido observar se calculan con el Teorema de Bayes

Teorema de Bayes.

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es un sistema completo de eventos, cada uno con probabilidad distinta a cero y B es un evento cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B|A_i)$, entonces las probabilidades $P(A_i|B)$ vienen dadas por la expresión:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n)}$$

Las probabilidades $P(A_i)$ reciben el nombre de probabilidades a priori, $P(A_i|B)$ se conocen como probabilidades a posteriori y $P(B|A_i)$ se denominan verosimilitudes.

En otras palabras, el teorema de Bayes nos permite calcular las probabilidades a posteriori, siempre y cuando conozcamos las probabilidades a priori y las verosimilitudes.

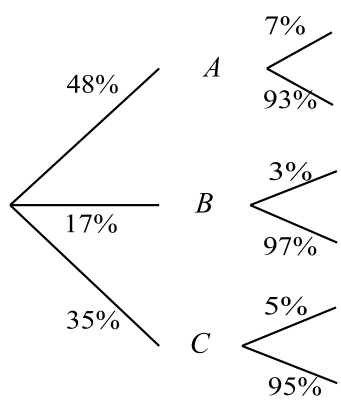
La diferencia entre la probabilidad condicional y el Teorema de Bayes es que, aunque en las dos probabilidades se analiza un evento dado otro, en la probabilidad condicional se calcula el efecto dado una causa, mientras que en el Teorema de Bayes se calcula la causa dado el efecto. En otras palabras, en el Teorema de Bayes se calcula la probabilidad a posteriori de un evento dado cierta información adicional y en la probabilidad condicional se calcula la probabilidad de que un evento ocurra dado que ha ocurrido otro evento.

Ejemplo:

Para la elaboración del uniforme escolar del Telebachillerato “La Gloria” se cuenta con tres proveedores. El proveedor A atiende al 48% de la población estudiantil, el proveedor B atiende al 17% y el proveedor C atiende al 35%. Se sabe que el porcentaje de uniformes que regresan los estudiantes por tener algún detalle que los cataloga como defectuosos es del 7% para el proveedor A, 3% para el proveedor B y 5% para el proveedor C. Si seleccionamos al azar un uniforme y encontramos que está catalogado como defectuoso ¿Cuál es la probabilidad de que dicho uniforme haya sido hecho por el proveedor B?

Se solicita determinar la probabilidad de una causa (uniforme hecho por un proveedor) dado un efecto (dado que está catalogado como defectuoso). Para calcular la probabilidad solicitada realizaremos lo siguiente:

a) nos apoyaremos en un diagrama de árbol que represente la situación del problema.



b) Definimos el experimento, el espacio muestral y los eventos:

Experimento: dado que un uniforme está defectuoso, ver que proveedor lo elaboró

Evento A: uniforme hecho por el proveedor A: $A = \{prov\ A\}$

Evento B: uniforme hecho por el proveedor B: $B = \{prov\ B\}$

Evento C: uniforme hecho por el proveedor C: $C = \{prov\ C\}$

Evento D: uniforme catalogado como defectuoso: $D = \{def\}$

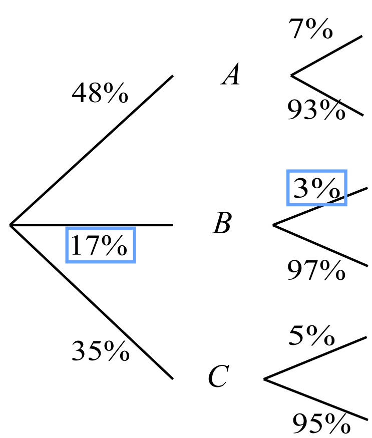
Evento E: uniforme catalogado como no defectuoso: $E = \{no\,def\}$

Espacio muestral: son los uniformes vendidos por los tres proveedores en el Telebachillerato "La Gloria"

c) Aplicamos el teorema de Bayes:
Si seleccionamos un uniforme al azar y encontramos que es defectuoso ¿Cuál es la probabilidad de que dicho uniforme haya sido hecho por el proveedor B? Esta pregunta equivale a encontrar la probabilidad de que el producto haya sido hecho por el proveedor B dado que es defectuoso.

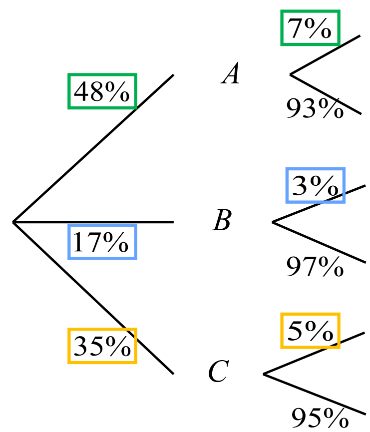
$$P(prov\,B|def) = \frac{P(prov\,B)P(def|prov\,B)}{P(prov\,A)P(def|prov\,A) + P(prov\,B)P(def|prov\,B) + P(prov\,C)P(def|prov\,C)}$$

Obtenemos las probabilidades solicitadas analizando el diagrama de árbol. Para el numerador tenemos que la probabilidad de que el uniforme lo haya hecho el proveedor B es del 0.17 (17%) mientras que la probabilidad de que salga defectuoso dado que lo hizo el proveedor B es de 0.03 (3%)



$$P(prov\,B|def) = \frac{(0.17)(0.03)}{P(prov\,A)P(def|prov\,A) + P(prov\,B)P(def|prov\,B) + P(prov\,C)P(def|prov\,C)}$$

Y para el denominador se tiene que, al analizar el diagrama de árbol, la probabilidad de que el uniforme lo haya hecho el proveedor A es de 0.48 (48%) y la probabilidad de que salga defectuoso dado que lo hizo el proveedor A es 0.07 (7%); la probabilidad de que el uniforme lo haya hecho el proveedor B es de 0.17 (17%) y la probabilidad de que salga defectuoso dado que lo hizo el proveedor B es 0.03 (3%); y la probabilidad de que el uniforme lo haya hecho el proveedor C es de 0.35 (35%) y la probabilidad de que salga defectuoso dado que lo hizo el proveedor C es 0.05 (5%):



$$P(prov\,B|def) = \frac{(0.17)(0.03)}{(0.48)(0.07)+(0.17)(0.03)+(0.35)(0.05)}$$
$$P(prov\,B|def) = \frac{0.0051}{0.0336+0.0051+0.0175}$$
$$P(prov\,B|def) = \frac{0.0051}{0.0562}$$
$$P(prov\,B|def) = 0.0907$$

d) concluimos.
Por lo tanto, si seleccionamos un uniforme al azar y encontramos que está defectuoso, la probabilidad de que dicho uniforme lo haya hecho el proveedor B es de 0.0907 (9.07%)

SESIÓN III

Propósito de la Sesión

Construir proyectos transversales de los módulos 3 al 6 correspondientes de las progresiones 6 a la 15 de la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) de Pensamiento Matemático I, de forma que se socialicen y formen parte de la metodología de la didáctica de la UAC.

Actividad

- **a)** Formar 8 equipos (los equipos tienen que estar equilibrados en sus integrantes entre hombres y mujeres)
- **b)** Leer el temario de Pensamiento Matemático I
- **c)** Elegir al azar uno de los 4 módulos
- **d)** Realizar un proyecto transversal tomando en cuenta las progresiones incluidas en el módulo
- **e)** Exponerlo al grupo

Evaluación final

Exposición del proyecto transversal

TEBAEV
Telebachillerato de Veracruz

Créditos

DIRECCIÓN GENERAL DE TELEBACHILLERATO

Claudia Hernández González
Directora General

Norma Susana Delgado Martínez
Subdirectora Técnica

Blanca Jimena Salcedo González
Jefa del Departamento Técnico Pedagógico

Joaquin Vasquez Pérez
Jefe de la Oficina de Planeación Educativa

Julieta Hernández Dorantes
Norma Angélica Basurto Murrieta
Responsables de la Academia Pedagógica Estatal

Gonzalo Jácome Cortés
Elaboración del cuadernillo

Julieta Hernández Dorantes
Revisión pedagógica

Pensamiento Matemático I. Cuadernillo de trabajo

Secretaría de Educación de Veracruz
Km 4.5 Carretera Federal Xalapa-Veracruz
Col. SAHOP, C.P. 91190, Xalapa, Veracruz
2023, 1ª edición
ISBN de la edición en PDF: En trámite.
México.

TEBAEV
Telebachillerato de Veracruz

Planeación Educativa

VERACRUZ GOBIERNO DEL ESTADO

SEV Secretaría de Educación

SEMSyS Subsecretaría de Educación Media Superior y Superior